E.1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
ОБМЕН - ОБЛАЕ
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CHIA

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

„Lenin a trăit,
Lenin trăiește,
Lenin va trăi"

★ ★ ★

ANUL V

IANUARIE 1954

1

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA
MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

Pag.

1. *Tineri, studiaţi şi adânciţi opera marelui geniu al omenirii muncitoare, Vladimir Ilici Lenin* 1
2. *Unele aplicaţii ale transformării geometrice prin inversiune, de conf. univ. Elena Mavrodin* ... 3
3. *Căldura şi temperatura de prof. Angela Negulescu* 8
4. *Construirea unui dispozitiv pentru experienţe de optică* 15
5. *Probleme rezolvate (E: 300, E: 323, 645, 729, 746, 750, 764, 789, 793, 795, 796, 819, 823, 824, 845, 847, 855)* 17
6. *Probleme propuse (1140—1163)* 22
7. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 401—E: 410)* 24
8. *Rubrica rezolvitorilor de probleme* 25

1

ANUL V IAN. 1954

OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICIENI

Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., sprijinită de Ministerul Învăţământului şi Uniunea Tineretului Muncitor, organizează în acest an „Olimpiada tinerilor matematicieni" pentru elevii claselor V-a, VI-a şi VII-a şi olimpiade de matematică pentru elevii şcolilor medii de zece ani, şcoli pedagogice şi medii tehnice.

Problemele pentru „Olimpiada tinerilor matematicieni" etapa I-a vor apare într'un supliment al Revistei Matematice şi Fizice care se va distribui gratuit în şcoli. Olimpiadele pentru elevii şcolilor medii de toate tipurile se vor desfăşura în mai multe etape:

1) Etapa pe şcoală până la 22 februarie 1954.

2) Etapa locală (în toate localităţile cu şcoli medii) la 28 februarie.

3) Etapa pe centre universitare (la Bucureşti, Iaşi, Cluj şi Timişoara) la 21 martie.

4) Etapa pe ţară la Bucureşti 11 aprilie 1954.

Elevii care nu au putut participa la etapa pe şcoală, pot participa la etapa locală. La etapele următoare nu pot participa decât cei reuşiţi la etapele precedente.

In numerele următoare ale Revistei Matematice şi Fizice vom publica alte informaţii privind modul de desfăşurare a olimpiadelor.

Elevi şi eleve, participaţi cu însufleţire la aceste olimpiade de matematici, organizate de către Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R.!

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul V, Nr. 1 Ianuarie 1954

Országos Műszaki Könyvtár

LA A 30ª COMEMORARE A MORŢII LUI VLADIMIR ILICI LENIN

TINERI, STUDIAŢI ŞI ADÂNCIŢI OPERA MARELUI GENIU AL OMENIRII MUNCITOARE, VLADIMIR ILICI LENIN!

Acum 30 de ani, la 21 Ianuarie 1924, s'a sfârşit calea vieţii lui Vladimir Ilici Lenin, conducătorul comunismului mondial, întemeietorul Partidului Comunist al Uniunii Sovietice.

Partidul bolşevic, creat şi călit de Lenin, geniul Revoluţiei, a condus poporul sovietic la victoria Marei Revoluţii Socialiste din Octombrie 1917, a organizat dictatura proletariatului, a ridicat masele de multe milioane de oameni ai muncii din Uniunea Sovietică la creaţie istorică conştientă, a asigurat construirea societăţii socialiste şi conduce ferm poporul sovietic înainte, spre comunism.

Numele lui Lenin, marele întemeietor şi înţeleptul conducător al partidului comunist, este indisolubil legat de întreaga istorie a partidului bolşevic, de apariţia şi desvoltarea primului stat socialist din lume – Uniunea Republicelor Sovietice Socialiste.

V. I. Lenin

Numele lui Lenin a devenit steagul oamenilor muncii din lumea întreagă pentru cauza păcii, democraţiei şi socialismului, pentru viitorul luminos al popoarelor.

Este cu neputinţă să se enumere în acest articol comemorativ, măcar în linii mari, toată opera gigantică a lui Lenin.

De aceea, ne vom strădui să scoatem în evidenţă câteva din ideile geniale care au stat la baza întregii activităţi a lui Vladimir Ilici Lenin.

Cercetând desvoltarea societăţii şi cuceririle ştiinţei, sintetizând experienţa mişcării muncitoreşti mondiale, Lenin a desvoltat marxismul corespunzător noilor condiţii istorice şi a militat pentru transpunerea lui în viaţă.

Cea mai adâncă şi sguduitoare caracterizare a vieţii şi operii lui Lenin o găsim în jurământul făcut de I. V. Stalin în numele partidului bolşevic şi al întregului popor sovietic, acum 30 de ani la Congresul al II-a al sovietelor din U.R.S.S.

Profund pătruns de un înalt spirit de clasă, maestru al metodei dialectice, V. I. Lenin a analizat în mod ştiinţific mişcarea muncitorească din Rusia ţaristă, perioada luptei hotărîtoare pentru unirea mişcării muncitoreşti cu socialismul, iar prin lucrările sale « Desvoltarea capitalismului în Rusia » (1899), şi « Ce-i de făcut? » (1902) a desăvârşit nimicirea ideologică greşită a narodnicismului, şi a sdrobit ideologia « economismului » punând bazele ideologice ale partidului de tip nou.

Lenin a elaborat strategia şi tactica ştiinţifică a luptei de clasă a proletariatului, a arătat care sunt aliaţii proletariatului elaborând şi teoria hegemoniei proletariatului în această alianţă.

« Leninismul — spune I. V. Stalin — a coborît pe pământ problema națională » elaborând o teorie nouă a luptei pentru eliberarea națională a popoarelor din colonii în epoca imperialismului.

In lucrarea sa « Imperialismul, stadiul cel mai înalt al capitalismului » (scrisă în primăvara 1916 și apărută în Aprilie 1917), Lenin continuă în mod genial învățătura lui Marx (« Capitalul »), analizând adânc un material documentar extrem de bogat cu privire la concentrarea producției și desvoltarea monopolurilor, rolul băncilor, a capitalului financiar, a exportului de capital, și a împărțirii lumii între capitaliști.

Lenin ajunge astfel, la concluzia că: imperialismul este un capitalism monopolist, parazitar și muribund, fiind ajunul revoluției socialiste.

Descoperind legea desvoltării inegale a țărilor capitaliste și ascuțirea la maximum a contradicțiilor capitalismului în condițiile imperialismului, Lenin arată că războaiele imperialiste pentru o nouă împărțire a lumii sunt inevitabile, ele ducând la slăbirea forțelor imperialiste, ceeace face posibilă *ruperea frontului imperialismului în punctul cel mai slab.*

Lenin a înțeles că în condițiile imperialismului, teoria lui Marx și Engels cu privire la victoria simultană a socialismului în toate țările, nu mai corespunde. Lenin demonstrează teoretic, *posibilitatea victoriei socialismului într'o singură țară.*

Această teorie este călăuza întregii activități ulterioare a lui Lenin obținând o strălucită verificare în reușita completă a Marei Revoluții Socialiste din Octombrie, începutul unei ere noi în istoria mondială.

In timpul primului război mondial Lenin a conceput o altă operă importantă « Statul și revoluția » (1917), în care examinează problema statului în condițiile victoriei noi.

Folosind experiența primelor două revoluții din Rusia, Lenin arată în mod științific că Republica Sovietelor de deputați a muncitorilor și soldaților este cea mai bună formă de organizare a dictaturii proletariatului. In felul acesta, Lenin a pus baza construirii statului de tip nou, Statul Socialist.

Totodată, Lenin arată că trecerea dela capitalism la comunism — în diferitele țări — cuprinde *o varietate abundentă de forme politice având însă, același conținut: dictatura proletariatului,* prin care se asigură cea mai largă democrație pentru oamenii muncii.

Lenin a elaborat nu numai forma de organizare a statului de dictatură a proletariatului, ci a arătat și sarcinile fundamentale precum și metodele de bază ale construirii socialismului în industrie, în agricultură și pentru crearea noii culturi.

Această învățătură a lui V. I. Lenin desvoltată de I. V. Stalin, călăuzește lupta partidelor comuniste și muncitorești în țările de democrație populară — și deci și a partidului nostru — pentru construirea socialismului.

Proletariatul din lumea întreagă s'a convins de măreția ideilor nemuritoare ale lui Lenin, idei care călăuzesc în luptă și duc la victorie pe toți cei exploatați.

Lenin a transformat setea de pace a oamenilor muncii într'o puternică armă de luptă împotriva imperialismului. El a arătat că inevitabilitatea războaielor în epoca imperialismului nu înseamnă deloc, că planurile atâțătorilor la război nu pot fi spulberate dacă se organizează o puternică mișcare de mase împotriva războiului, pentru pace, pentru libertățile democratice.

Lenin a fost conducătorul ideologic al luptei împotriva oportunismului de pretutindeni.

In lucrarea sa « Materialism și empiriocriticism », V. I. Lenin face o profundă și sistematică analiză critică a tuturor curentelor și sistemelor filosofice idealiste, desvăluind caracterul lor reacționar.

Rând pe rând, demască pe toți acei care încearcă să desmintă materialismul — machiștii — empiriocriticiștii — etc. In acelaș timp, formulează principiile fundamentale ale teoriei marxiste a cunoașterii, cu claritate neîntâlnită. In cuvinte simple și prin exemple concrete Lenin arată, că lucrurile există independent de conștiința noastră, independent de senzațiile noastre.

Lenin demonstrează că știința este într'un proces continu de desvoltare.

Pornind dela aceste principii, V. I. Lenin a aplicat teoria marxistă a cunoașterii prin considerațiile sale în domeniul fizicei, de o importanță covârșitoare pentru desvoltarea acestei științe chiar și în zilele noastre.

Minunată este precizarea de către Lenin, a noțiunilor despre materie, mișcare, spațiu, timp. Folosind metoda dialectică a reușit pe deplin, să curețe balastul putred cu care filosofii și fizicienii reacționari au încărcat aceste noțiuni și să lumineze calea spre adevăr.

Concepțiile lui Lenin au o deosebită importanță. In primul rând ele dovedesc odată mai mult, puterea de previziune științifică a dialecticianului într'un moment critic al desvoltării fizicii, și în al doilea rând, pentrucă în zilele noastre diferiți fizicieni reacționari încearcă să tragă concluzii

greşite din descoperirile noi în domeniul fizicii atomului. Ei caută să răstoarne cauzalitatea fenomenelor îndepărtându-se dela adevăr.

Vorbind despre structura atomului, Lenin arată că «variabilitatea tuturor formelor materiei şi ale mişcării ei, au fost totdeauna reazimul materialismului dialectic. In natură, toate graniţele sunt relative, convenţionale, mobile, ele exprimând apropierea minţii noastre de cunoaşterea materiei; acest fapt nu dovedeşte însă, nicidecum, că însăşi natura, materia, n'ar fi decât un simbol, un semn convenţional, adică un produs al minţii noastre...

Mintea omenească a descoperit în natură, multe lucruri minunate şi va descoperi şi mai multe, mărindu-şi astfel, puterea ei asupra naturii»[1]).

Aşa vă vorbeşte vouă, tinerilor studioşi, acela care în plin război împotriva intervenţioniştilor (Decembrie 1920) a declarat: «Comunismul este puterea sovietică plus electrificarea întregii ţări».

Toate evenimentele care s'au petrecut după moartea lui Lenin au dovedit justeţea teoriei leniniste.

Pentru tinerii noştri dragi, constructori de mâine ai socialismului în patria noastră, opera ştiinţifică a lui V. I. Lenin, constitue un isvor nesecat de cunoştinţe juste despre lume.

«Leninismul — a spus I. V. Stalin — este marxismul epocii imperialismului şi al revoluţiei proletare. Mai precis: leninismul este teoria şi tactica revoluţiei proletare în general, teoria şi tactica dictaturii proletariatului, în special»[2]).

Pentru poporul nostru muncitor, călăuzit de învăţătura revoluţionară a leninismului nu mai există drum înapoi spre robie. Pentru el nu mai poate exista decât un singur drum: «drumul luptei pentru victoria păcii şi socialismului.

[1]) «Materialism şi empiriocriticism», ed. P.M.R. 1948, pag. 317—318.

[2]) I. V. Stalin: Opere, vol. VI, ed. P.M.R. 1950, pag. 80.

UNELE APLICAŢII ALE TRANSFORMĂRII GEOMETRICE PRIN INVERSIUNE

Conf. Univ. ELENA MAVRODIN

Inversiunea se foloseşte în rezolvarea unor tipuri de probleme care prezintă dificultăţi prin utilizarea metodelor geometrice generale în scopul de a economisi şi a scurta demonstraţiile.

Trebue să atragem atenţia că nu orice problemă de geometrie se rezolvă mai simplu aplicând o inversiune.

In figurile în care intervin drepte şi cercuri, rezolvarea se simplifică simţitor, dacă inversăm figura în aşa fel încât majoritatea elementelor să se păstreze (polul şi puterea de inversiune fiind la alegerea noastră) conform teoriei expusă în articolul despre inversiune din R.M.F. Nr. 9—1953.

Alegerea polului şi puterii de inversiune e în funcţie de problema pe care o avem de rezolvat; ea e o problemă de bază.

Când într'o problemă avem mai multe drepte şi cercuri ce trec prin acelaş punct alegem ca pol, punctul comun dreptelor şi cercurilor.

Uneori e convenabil să alegem polul pe cerc şi să transformăm problema în aşa fel încât să lucrăm numai cu drepte.

Acest lucru se utilizează mai ales în probleme de construcţii grafice.

Principalele tipuri de probleme în care se utilizează inversiunea sunt:

1. Probleme de colinearitate conciclicitate şi concurenţă.
2. Probleme de locuri geometrice.
3. Probleme de relaţii metrice.
4. Probleme de construcţii grafice.

1. Probleme de colinearitate, conciclicitate şi concurenţă

a) Se dau 2 cercuri concentrice C_1 şi C_2 de centru O. Pe raza OA a cercului exterior C_1 ca diametru se construeşte cercul C_3 care tae cercul interior în B şi C. Razele OB şi OC întâlnesc în E şi F cercul C_1. Fie D intersecţia lui OA cu cercul C_2 (fig. 1); să se arate că punctele D, E, F sunt colineare.

Metoda inversiunii e foarte utilă în asemenea cazuri şi ea constă în a alege polul şi puterea de inversiune aşa ca dreapta pe care se află punctele să provină din inversiunea unui cerc care trece prin pol.

In cazul de mai sus, vom alege ca pol punctul O, fiind punctul prin care trec cele mai multe linii,

iar puterea de inversiune aşa fel ca cercurile C_1 şi C_2 să se transforme unul în altul.

Aceasta are loc pentru $K = R_1R_2$.

Inversând figura, cercul C_1 se transformă în C_2, iar cercul C_3 trecând prin pol se va transforma într'o dreaptă perpendiculară pe OA în D, inversul punctului A şi trecând prin E şi F inversele punctelor B şi C, tangentă în D la cercul C_2. Deci punctele D, E şi F sunt colineare.

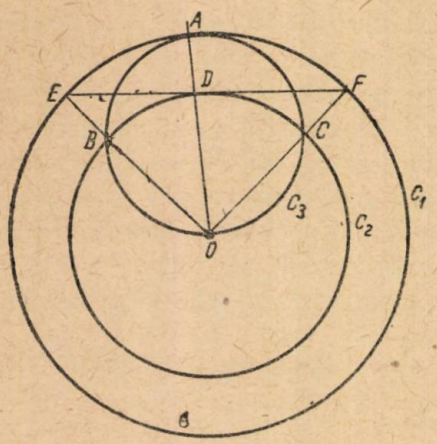


Fig. 1

b) Se dau două cercuri O_1 şi O_2 secante în A şi B. Tangentele în A la cercurile O_1 şi O_2, tae pe O_1 şi O_2 în D şi C. Fie E simetricul lui A faţă de B. Să se arate că patrulaterul $ACED$ e inscriptibil (fig. 2).

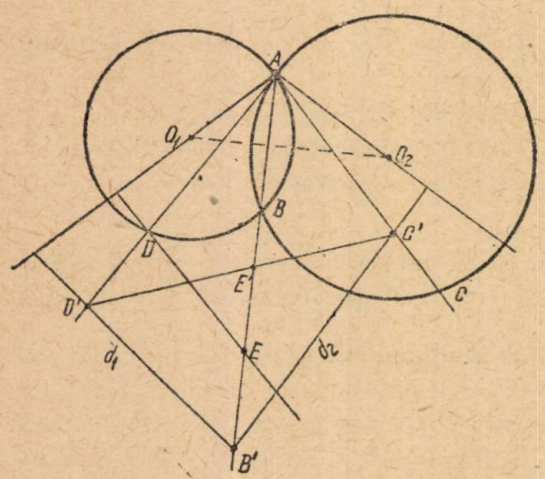


Fig. 2

Vom reduce problema de conciclicitate la o problemă de colinearitate cu ajutorul inversiunii.

Luăm ca pol punctul A, iar k o puterea arbitrară. Cercurile O_1 şi O_2 se vor transforma în dreptele d_1 şi d_2 perpendiculare pe diametrele ce trec prin A în cele două cercuri.

Dreptele d_1 şi d_2 sunt paralele cu tangenta în A la cele două cercuri. Inversele punctelor C şi D vor fi punctele C' şi D' pe d_1 şi d_2.

Punctul B', intersecţia lui d_1 şi d_2 e inversul lui B. Figura $AC'B'D'$ e un paralelogram (având laturile paralele două câte două). Inversul E' al punctului E se va găsi în interiorul paralelogramului pe dreapta AB aşa ca $AE' = \frac{AB'}{2}$; el va fi centrul de simetrie al paralelogramului şi deci $C'E'D'$ vor fi colineare.

Inversând dreapta $C'E'D'$, devine un cerc ce trece prin polul A şi inversele punctelor $C'E'D'$ adică prin C,E,D. Deci patrulaterul $ACED$ e inscriptibil.

2. Probleme de locuri geometrice

Unele probleme de locuri geometrice se reduc prin inversiune la probleme cunoscute ca de exemplu:

Pe o dreaptă a se dau trei puncte A,B,C. Prin B şi C se duce un cerc variabil. Prin A, trece un cerc tangent acestuia şi în A dreptei ABC. Care e locul geometric al contactelor celor două cercuri?

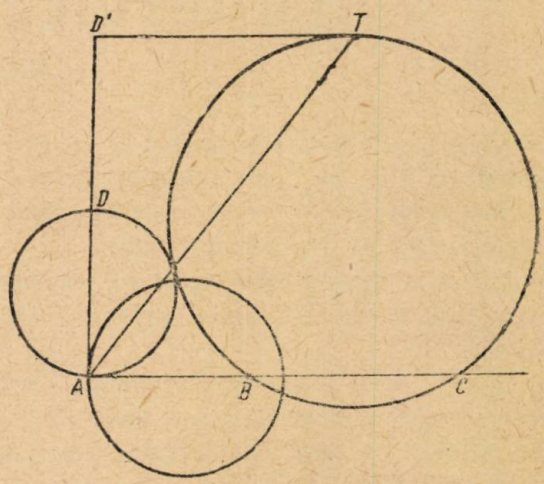


Fig. 3

Inversăm faţă de A cu puterea de inversiune $AB \cdot AC$. Cercul variabil BC se transformă în el însuşi, iar cel ce trece prin A se transformă într'o dreaptă tangentă cercului variabil şi paralelă cu ABC.

Punctul de contact e pe mediatoarea segmentului BC, deci locul lui e această mediatoare.

Inversând din nou faţă de acelaş pol şi cu aceeaşi putere, mediatoarea BC se transformă într'un cerc care trece prin polul A şi care e soluţia problemei.

3. Probleme de relaţii metrice

Multe probleme de relaţii metrice se rezolvă prin inversiune în modul cel mai simplu. De pildă:

Să se demonstreze prin inversiune teorema bisectoarei: să arătăm că în triunghiul ABC, AD fiind bisectoarea (interioară sau exterioară) avem relaţia

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Alegem ca pol vârful A al triunghiului ABC, iar puterea de inversiune arbitrară.

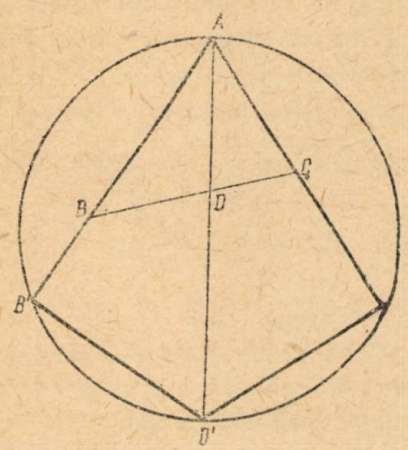


Fig. 4

Dreptele AB, AD şi AC se vor păstra, iar latura BC se va transforma într'un cerc ce trece prin A. B',C',D' inversele punctelor B,C,D se găsesc la intersecţia laturilor AB,AC şi AD cu cercul. In figura inversă

$$B'D' = D'C', \quad \text{deoarece} \quad A_1 = A_2. \qquad (1)$$

Folosind formulele de transformare

$$B'D' = \frac{K \cdot BD}{AB \cdot AD}; \quad D'C' = \frac{K \cdot DC}{AD \cdot AC}$$

$$\frac{K \cdot BD}{AD \cdot AB} = \frac{K \cdot DC}{AD \cdot AC}$$

de unde simplificând avem:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AD}.$$

Deasemeni teorema lui Ptolomeu se demonstrează mult mai simplu cu ajutorul inversiunii.

Probleme de construcţii grafice

Şi în unele probleme de construcţii grafice se aduc uneori simplificări. De pildă:

Să se construiască un cerc tangent unui cerc O dat şi trecând prin două puncte date A şi B.

Construcţia cercului prin mijloace elementare e destul de complicată. Simplificăm problema, transformând prin inversiune cercul în dreaptă şi reducând construcţia cercului la aceea a unei drepte.

Din analiza problemei se vede că cercul va fi determinat, dacă se va cunoaşte punctul de contact C al cercului cu cercul O, dat şi în acest caz problema se reduce la construcţia unui cerc care trece prin trei puncte.

Pentru simplificare vom lua ca pol de inversiune unul din puncte de exemplu: A, iar puterea o luăm astfel ca cercul O să se transforme în el însuşi ($K = AT^2$). Construim acum figura inversă. Fie B' inversul lui B. Figura inversă e formată din B' şi cercul O.

In condiţiile acestea, problema se reduce la construcţia unei tangente dintr'un punct la un cerc şi anume la construcţia tangentei din B' la cercul O. Fie T_1 şi T_2 punctele de contact.

Inainte de a reveni la figura iniţială să discutăm posibilitatea şi numărul soluţiilor.

Dacă B' va fi exterior cercului O problema are soluţii şi anume 2 soluţii.

Dacă B' e pe cercul O problema are soluţie şi numai una.

Dacă B' e în interiorul cercului, problema n'are soluţie.

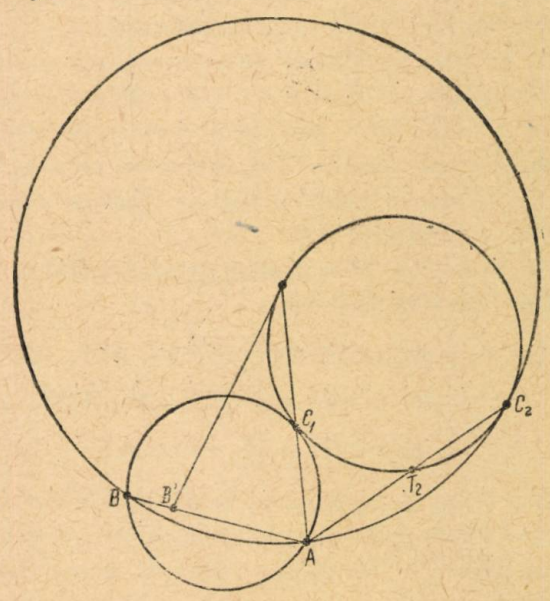


Fig. 5

Revenim la figura iniţială. Pentru a găsi punctele C_1 şi C_2 de contact ale cercului ce trebue construit cu cercul dat, unim polul A cu punctele T_1 şi T_2 şi punctele C_1 şi C_2 de intersecţie ale dreptelor AT_1 şi AT_2 cu cercul O sunt punctele căutate.

Cercurile $AB\,C_1$ şi $AB\,C_2$ sunt cercurile cerute din enunţ.

Din problemele expuse mai sus rezultă că inversiunea rezolvă probleme a căror soluţie geometrică prin mijloace elementare e destul de grea sau chiar imposibilă.

Despre inversori

Pentru realizarea în practică a inversei unei curbe oarecare, s'a imaginat un instrument numit inversor.

Inversorul acesta este alcătuit dintr'un sistem de 6 bare articulate două câte două în felul următor:

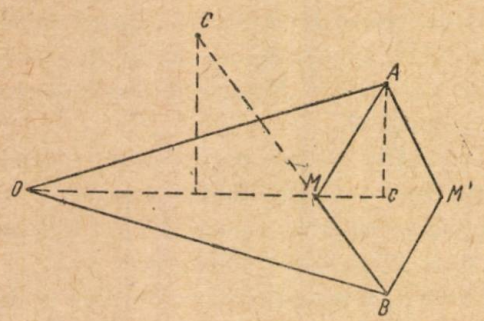


Fig. 6

4 bare egale formează rombul $AMBM'$, iar vârfurile A şi B sunt constrânse să lunece pe un cerc prin două bare $OA = OB$ articulate în O care e fix. Vârfurile M şi M' sunt prevăzute cu creioane.

Când vârful M parcurge o curbă C, vârful M' descrie curba inversă C' în raport cu O.

In adevăr, dacă vom nota constantele instrumentului $OA = OB = R$ şi $AM = MB = M'B = M'A = l$ şi cu C punctul de intersecţie al diagonalelor rombului articulat, se observă că punctele O, M, M' rămân mereu colineare fiind pe mediatoarea segmentului AB.

Ne propunem să calculăm produsul $OM\ OM'$. Din figură se vede că:

$$OM \cdot OM' = (OC - MC)(OC + MC) = OC^2 - MC^2 =$$

$$= OC^2 - AM^2 + AC^2 = OA^2 - AM^2$$

deci $$OM \cdot OM' = R^2 - l^2 = K$$

ceeace arată că punctele M şi M' sunt puncte inverse faţă de polul O, raza cercului de inversiune fiind $\sqrt{R^2 - l^2}$. Pentru $R > l$ puterea de inversiune e pozitivă.

Puterea de inversiune $K = OA^2 - AM^2$, poate lua valoarea dată, deoarece avem totdeauna posibilitatea de a găsi o lungime OA astfel ca $OA^2 - AM^2 = K$.

Pentru ca punctul M să descrie un cerc care să treacă prin pol îl legăm prin a şaptea bară rigidă de un punct fix C. In acest caz punctul M' va descrie o dreaptă.

S'a mai imaginat un inversor bazat pe următorul principiu:

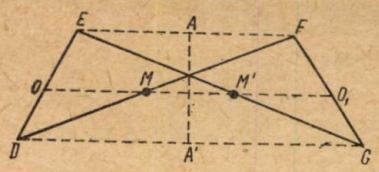


Fig. 7

El e format din patru drepte $DE = FG$ şi $EG = DF$, articulate în punctele D, E, F şi G şi care formează un trapez isoscel. Mijloacele diagonalelor M şi M' sunt prevăzute cu nişte creioane.

Dacă se fixează mijlocul O sau O_1 al uneia din laturile neparalele şi se consideră A şi A' mijloacele bazelor, figura $AMA'M'$ e un romb a cărui latură este egală cu $\frac{DE}{2}$ constantă. Deasemenea

$$OA = OA' = \frac{DF}{2} = K.$$

E clar că atunci când M descrie o curbă C punctul M' descrie inversa ei C', deoarece problema se reduce la o problemă deja studiată cu ajutorul inversorului descris mai înainte.

Inversiunea de spaţiu

1. Transformarea prin inversiune din plan se poate foarte uşor extinde şi pentru spaţiu.

Ca şi în plan, vom defini inversul unui punct M faţă de un pol O şi de putere de inversiune K, un punct M' care satisface următoarele condiţii:

a) O, M, M' colineare

b) $OM \cdot OM' = K$.

Locul geometric al tuturor punctelor din spaţiu care coincid cu inversele lor este sfera de rază $\sqrt{K}$, care se va numi sfera de inversiune.

Ca şi în plan, toate punctele situate în interiorul sferii de inversiune îşi au inversele în spaţiul exterior sferii de inversiune şi reciproc.

Construcţia inversului unui punct M se face reducând problema la o problemă de construcţie în plan a inversului punctului M.

In adevăr, secţionând sfera de inversiune printr'un plan α, determinat de punctul M şi diametrul sferii perpendicular pe direcţia OM, se poate construi inversul M' al lui M în planul α faţă de cercul de secţiune — acesta fiind cercul de inversiune de rază $\sqrt{K}$.

O serie de proprietăţi din plan se extind şi în spaţiu.

Proprietăţile configuraţiei alcătuită din două puncte şi inversele lor sunt valabile şi pentru spaţiu.

Inversa unei drepte ce trece prin pol este, evident, ea însăşi.

Inversul unui cerc care este în acelaş plan cu polul este tot un cerc.

Inversul unui plan

Ca şi în plan, se pot prezenta două cazuri:

a) polul de inversiune e situat în plan;

b) polul de inversiune nu e situat în plan.

a) In cazul când polul de inversiune e situat în plan, este evident că el se transformă în el însuşi, deoarece unui punct din plan îi corespunde un alt punct din plan.

b) Dacă polul de inversiune nu e situat în plan, vom considera ca şi în plan, o problemă de loc geometric (fig. 8).

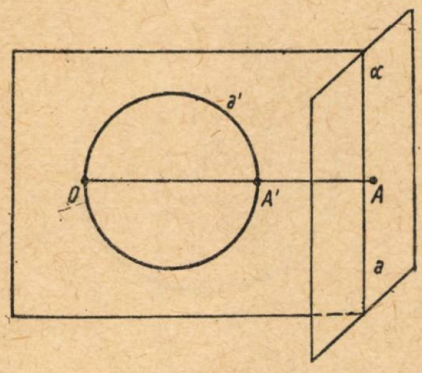


Fig. 8

Să considerăm un punct particular A al planului α, proiecţia polului O pe planul α şi fie A' inversul lui A.

Orice plan β ce trece prin perpendiculara OA taie planul α după o dreaptă a perpendiculară pe OA. Inversa acestei drepte este cercul a' situat în planul β şi de diametru OA'.

Când planul β face o rotaţie complectă în jurul lui OA, dreapta a va descrie planul α iar cercul a' va descrie o sferă de diametru OA'.

Rezultă teorema:

Inversul unui plan ce nu trece prin polul de inversiune este o sferă ce trece prin pol şi al cărei centru se află pe perpendiculara dusă din pol pe plan.

Ca şi în plan, se poate demonstra că inversa unei sfere ce trece prin polul de inversiune este un plan perpendicular pe dreapta ce trece prin polul de inversiune şi centrul sferei.

Din propoziţiile stabilite pentru spaţiu, se vede că toate propoziţiile relative la inversiune stabilite pentru plan se pot extinde şi în spaţiu înlocuind «dreapta» cu «planul», «cercul» cu «sfera».

Reproducând un raţionament analog cu cel din plan, putem stabili că inversa unei sfere C, ce nu trece prin pol este o sferă C' al cărui centru C' e colinear cu O şi C, sferă omotetică cu cea dată în raportul $\frac{K}{p}$ (p fiind puterea polului O în raport cu sfera C).

Se poate demonstra uşor că inversul unui cerc ce nu trece prin polul de inversiune este tot un cerc.

Şi în spaţiu unghiul a două curbe sau a două suprafeţe se conservă.

Cele mai multe aplicaţii ale inversiunii plane se extind şi în spaţiu, transpunând în limbajul spaţial teoremele demonstrate sau aplicaţiile utilizate acolo.

Una din aplicaţiile importante ale inversiunii în spaţiu este proiecţia stereografică. Ea face să corespundă unui punct de pe o sferă un punct dintr'un plan, lucru totdeauna posibil, dacă considerăm planul ca transformatul prin inversiune al sferii (polul fiind evident pe sferă).

Dacă considerăm o sferă S de centru O_1 şi un punct O pe sferă drept pol, ea se va transforma aplicându-i o inversiune faţă de O într'un plan α perpendicular pe OQ. Pentru ca acest plan α să treacă prin centrul O_1 al sferii va trebui ca puterea de inversiune să fie egală cu $2R^2$ (fig. 9).

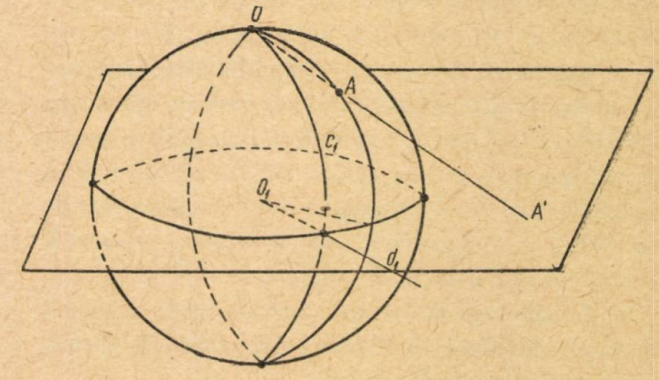


Fig. 9

Orice punct A de pe sferă, în afară de pol se va transforma într'un punct A' situat pe planul α la distanţă finită. Punctul A' poartă numele de proiecţia stereografică a lui A.

O curbă oarecare (C) de pe sferă va avea în planul α o curbă corespondentă (C') proiecţia stereografică a curbei C.

Unghiul a două curbe C_1 şi C_2 de pe sferă se va păstra în proiecţie stereografică.

Meridianele sferii ce trec prin polul O se vor proiecta stereografic după nişte drepte.

Un cerc de pe sferă se va proiecta stereografic tot printr'un cerc.

Construcţia hărţilor se bazează pe aceste consideraţii simple.

CĂLDURA ŞI TEMPERATURA

Prof. ANGELA NEGULESCU

Aceste două noţiuni: căldură şi temperatură se confundă de multe ori în viaţa de toate zilele şi chiar de către elevi atunci când încep studiul fizicii. Care este sensul fizic al acestor noţiuni? Cum se manifestă căldura şi temperatura? Fizica moleculară arată din ce sunt alcătuite corpurile, arată cum se mişcă moleculele şi dă răspunsuri la întrebările puse mai sus.

1. Mişcare ordonată şi mişcare desordonată

Materia are structură granulară. Toate corpurile sunt formate din molecule şi atomi, care sunt foarte mici şi foarte multe. Pentru a ne forma o idee despre scara microuniversului, să considerăm că aşezăm în linie dreaptă toată cantitatea de atomi care intră în compoziţia unui cm^3 de cupru. Se formează un lanţ lung cât de 90 de ori distanţa dela pământ la Soare.

Moleculele oricărui corp se află în necontenită mişcare aşa cum se dovedeşte prin fenomenul de difuziune şi prin mişcarea browniană. Dar, mişcările moleculare se deosebesc de mişcarea mecanică. Mişcarea unui tramvai, a unui piston, a unei roţi de strung este o mişcare de ansamblu, este o mişcare ordonată. Indiferent dacă este mişcare de translaţie sau de rotaţie, toate moleculele corpului se mişcă în aceeaşi direcţie, se mişcă ca un tot ale cărui molecule au toate aceeaşi viteză [1]). Mişcarea de ansamblu a moleculelor este o *mişcare ordonată*, având *aceeaşi direcţie de mişcare.*

Să considerăm cazul unui piston, care se mişcă în mişcare alternativă de translaţie; dacă o moleculă are energia cinetică

$$W_1 = \frac{mv^2}{2}$$

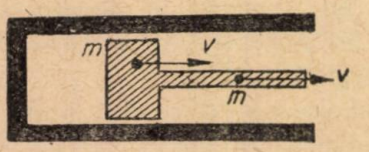


Fig. 1

toate moleculele pistonului vor avea energia cinetică:

$$W = \sum \frac{mv^2}{2}.$$

In cazul mişcării de rotaţie a unei roţi de strung, toate moleculele care formează roata au la fel o mişcare ordonată, având *aceeaşi direcţie* de rotaţie. Viteza liniară a oricărei molecule este proporţională cu depărtarea ei faţă de axul de rotaţie:

$$v_k = r_k \omega$$

O moleculă are energia cinetică:

$$W_k = \frac{m_k v_k^2}{2}$$

şi toată roata va avea energia cinetică de rotaţie egală cu suma energiilor moleculelor sale:

$$W = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_k r_k^2.$$

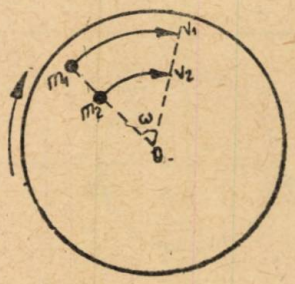


Fig. 2

Insă $I = \sum m_k r_k^2$ se numeşte în mecanică moment de inerţie şi reprezintă măsura inerţiei corpului în mişcarea de rotaţie, (şi depinde de repartiţia maselor în jurul centrului de rotaţie).

$$W = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Astfel se observă că energia cinetică de rotaţie a unui corp rigid se exprimă printr'o formulă care seamănă cu formula energiei cinetice de translaţie, cu deosebire că în locul masei, aici se găseşte momentul de inerţie, iar în locul vitezei lineare, aici se află viteza unghiulară.

Energia cinetică de translaţie sau de rotaţie a corpurilor ale căror molecule se mişcă ordonat, are ca efect punerea în mişcare a diferitelor mecanisme şi este folosită în producţie ca lucru mecanic.

Ce este însă o mişcare desordonată? Să considerăm aerul din camera în care ne găsim. Observând macroscopic, el este liniştit, are aceeaşi densitate în orice punct al camerii. Barometrul aşezat în diferite puncte arată aceiaşi presiune, iar termometrul, aceiaşi temperatură. In realitate însă, privind lucrurile la scara moleculară, microscopic, moleculele de aer se află în necontenită mişcare. (Aceasta o dovedeşte şi faptul că mirosul unei

[1]) Pentru mişcarea de rotaţie este vorba de aceeaşi viteză unghiulară.

flori se răspândeşte în toată camera). Mişcarea fiecărei molecule însă, se face aşa fel încât global nu se schimbă distribuţia uniformă a aerului din cameră. Inseamnă că: într'o direcţie se mişcă tot atâtea molecule câte se mişcă şi în direcţia opusă. Deci moleculele nu au o mişcare dirijată într'o anumită direcţie, ci mişcările lor se fac *în toate direcţiile posibile.* O astfel de mişcare a miliardelor de miliarde de molecule se numeşte *mişcare desordonată* sau mai bine *mişcare haotică.*

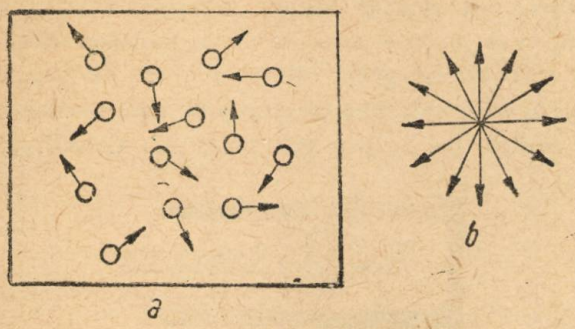


Fig. 3

Desordinea mişcării nu trebue înţeleasă ca şi când legile de mişcare ar lipsi. Fiecare moleculă se mişcă după legile mecanicii, însă privită *global* mişcarea tuturor moleculelor nu este o mişcare mecanică, nu este dirijată într'o anumită direcţie. Moleculele au viteze diferite, care se schimbă în fiecare moment şi ca valoare şi ca direcţie.

Dacă dintr'un punct *A*, (fig. 3) vom duce vectori proporţionali şi paraleli cu vitezele moleculelor unui gaz la un moment dat (fig. 3) atunci rezultanta acestor vectori va fi zero: $\sum \bar{v}_k = 0$.

Gazul nu se deplasează mecanic, deşi moleculele lui sunt în necontenită mişcare.

2. Ce este căldura?

Din cauză că orice moleculă dintr'un gaz se mişcă, ea are o energie cinetică:

$$W_k = \frac{m_k v_k^2}{2}$$

iar energia tuturor moleculelor gazului va fi:

$$W = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Energia este însă o mărime scalară şi deci, valoarea ei nu depinde de direcţia de mişcare. Energia tuturor moleculelor nu poate fi nulă, ea trebue să aibă o anumită valoare. Atunci, cum se manifestă această energie, dacă ea nu poate produce acţiuni mecanice şi nici nu poate să dispară, pentrucă ar contrazice legea de conservare şi transformare a energiei. Această *energie cinetică totală a moleculelor în mişcarea lor haotică este* tocmai *căldura.*

Adică,

$$W = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = JQ$$

în care J este echivalentul mecanic al caloriei, iar Q este căldura pe care o observăm noi şi care este datorită acţiunii mişcării desordonate a moleculelor.

De exemplu, când un gaz este în contact cu o sârmă de metal incandescentă, energia cinetică a moleculelor de gaz se măreşte prin ciocnire cu moleculele sârmei şi gazul se încălzeşte. Energia cinetică este egală cu cantitatea de căldură «absorbită de gaz dela sârmă».

Sau, alt exemplu: senzaţia plăcută ce o avem într'o baie caldă este din cauză că miliardele de molecule din apa băii se ciocnesc cu moleculele corpului şi ne transmit energia lor cinetică.

Deci, pentruca energia cinetică să se manifeste ca energie calorică, trebuiesc îndeplinite neapărat 2 condiţii:

1. mişcarea să fie făcută de un *număr imens* de particule, şi

2. mişcarea să fie dezordonată, *haotică.*

Mişcarea haotică a multitudinei de molecule se numeşte mişcare termică. Dacă lipseşte una din cele două condiţii, mişcarea nu mai este termică: numai unitatea lor dă fenomenul caloric.

Mişcarea termică este o formă nouă şi mai complicată de mişcare, decât mişcarea mecanică. Legile ei decurg din îmbinarea legilor mecanicii cu legile statisticii matematice.

Bazele acestei interpretări cinetice a căldurii, au fost puse de Lomonosov (1748) care a conceput cel dintâi, teoria cinetico-moleculară a materiei. Pe vremea aceea, căldura era socotită ca o materie imponderabilă: «caloricul». (Chiar Lavoisier făcând o listă a elementelor a pus în capul listei ca elemente fără greutate: lumina şi căldura). Lomonosov arată că ceeace dă naştere căldurii este mişcarea internă a «particulelor insensibile» (azi numite molecule) ale materiei. Această mişcare nu se vede, explică Lomonosov, pentrucă practic, sunt foarte mici şi noi o vedem la depărtare.

Pe de altă parte, la începutul secolului XIX-lea se socotea că lucrul mecanic poate să dispară fără urme.

Teoria cinetico-moleculară şi experienţele lui Joule, Lenz şi alţii au dovedit că orice căldură

este o energie care se poate transforma în lucru mecanic sau poate proveni din lucru mecanic.

$$W \underset{\text{tehnic}}{\overset{\text{natural}}{\rightleftarrows}} Q$$

(mişcare ordonată) (mişcare desordonată)

Prin urmare, transformarea între lucru mecanic şi căldură este reciprocă. Prin frecare, ciocnire, W se transformă în Q în cantităţi echivalente, iar în maşina cu abur, turbine, motori cu ardere internă, căldura se transformă în lucru mecanic. Pe când prima transformare este o trecere dela mişcarea ordonată la cea desordonată şi se face dela sine şi integral, cea de-a doua transformare este o trecere dela mişcarea desordonată la mişcarea ordonată şi se face totdeauna cu pierderi şi numai pe cale tehnică, nu dela sine. Randamentul acestui fel de transformare este mic şi se duce o luptă continuă pentru a-l face să crească, adică pentru a transforma mişcarea desordonată cât mai complet, în mişcare ordonată.

3. Ce este presiunea?

Din mecanică se ştie că un corp care loveşte perpendicular o suprafaţă exercită asupra ei o forţă de apăsare egală cu variaţia cantităţii lui de mişcare. Dacă pe o placă $ABCD$ mobilă în jurul lui AB, cade un corp de masă m, cu viteză v, corpul comunică plăcii o cantitate de mişcare mv, iar placa ajunge în poziţia $ABC'D'$. Pentru a echi-

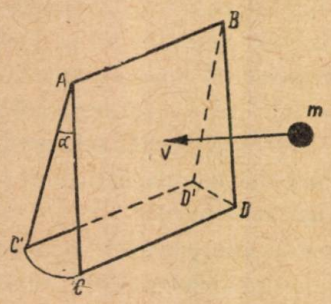


Fig. 4

libra forţa de apăsare produsă de ciocnirea corpului, va trebui să se aplice o forţă f, opusă vitezei v şi care are mărimea dată de relaţia:

$$f = \frac{\Delta (mv)}{\Delta t}$$

care este tocmai legea a doua a mecanicii, deoarece:

$$f = \frac{\Delta (mv)}{\Delta t} = \frac{m \cdot \Delta v}{\Delta t} = m\,a \text{ (masa fiind}$$

constantă variaţia cantităţii de mişcare depinde numai de variaţia vitezei în unitatea de timp, adică de acceleraţie).

Dacă, asupra plăcii cade o ploaie continuă de corpuri, asupra ei se exercită o apăsare:

$$F = \Sigma f = \Sigma \frac{\Delta (mv)}{\Delta t}$$

care dă o presiune: $p = \frac{F}{S}$, unde S este suprafaţa plăcii.

Cu alte cuvinte, presiunea este produsă de suma impulsurilor tuturor corpurilor care ciocnesc necontenit suprafaţa.

Presiunea gazelor asupra pereţilor vasului în care sunt închise este datorită aceleiaşi cauze. Să considerăm gazul dintr'un corp de pompă (fig. 5) şi să calculăm presiunea pe care o exercită moleculele lui asupra pistonului M. Considerăm

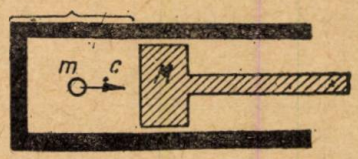


Fig. 5

gazul suficient de rarefiat pentruca o moleculă să poată parcurge distanţa dela piston la fundul cilindrului fără să se ciocnească cu altă moleculă. Presupunem ciocnirile moleculare perfect elastice, adică ele se reflectă fără pierdere de viteză. O moleculă ciocneşte pistonul căzând perpendicular pe el, se întoarce pe acelaş drum cu aceeaşi viteză însă de semn contrar, ciocneşte fundul cilindrului, se întoarce, iar ciocneşte pistonul, şi aşa mai departe. Inainte de ciocnirea pistonului molecula are cantitatea de mişcare (impulsul) mc, iar după ciocnire $-mc$. Deci variaţia cantităţii de mişcare va fi:

$$\Delta (mc) = mc - (-mc) = 2mc$$

Apăsarea produsă de această moleculă, prin ciocnirile ei repetate pe piston, va fi:

$$f = \frac{\Delta (mc)}{\Delta t}.$$

Pentru a o calcula este necesar să cunoaştem variaţia cantităţii de mişcare *într'o secundă*. De câte ori pe secundă se ciocneşte molecula de piston? De atâtea ori, de câte ori parcurge drumul $2l$ (dus-întors) într'o secundă. Drumul $2l$ este parcurs cu viteza c, deci în $t = \frac{2l}{c}$. Intr'o secundă acest drum va fi parcurs de $\frac{1}{t} = \frac{c}{2l}$ ori.

Atunci,

$$f = \frac{\Delta (mc)}{\Delta t} = 2mc \frac{c}{2l} = \frac{mc^2}{l}.$$

Dar pistonul nu e lovit de o singură moleculă, ci de o mare parte din moleculele aflate în corpul de pompă. De câte? Cunoscând că mişcarea moleculelor este haotică, deci rezultanta mişcării globale este zero, înseamnă că din cele n molecule aflate în cilindru, $\frac{n}{3}$ se vor mişca orizontal, $\frac{n}{3}$ se vor mişca vertical şi $\frac{n}{3}$ molecule se vor mişca perpendicular pe aceste două direcţii. Pistonul va fi ciocnit în fiecare moment de $\frac{n}{3}$ molecule. Forţa cu care este apăsat va fi:

$$F = \frac{n}{3} f = \frac{n}{3} \cdot \frac{mc^2}{l} \text{ dyne.}$$

In aceste condiţii presiunea P va fi:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{n}{3} \cdot \frac{mc^2}{Sl}$$

unde S este suprafaţa pistonului. Dar $Sl = V$ este tocmai volumul corpului de pompă, adică volumul gazului, iar presiunea pe piston este aceeaşi ca pe toţi pereţii, deci, presiunea gazului închis. Atunci:

$$P = \frac{n}{3} \cdot \frac{mc^2}{V} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n}{V} \cdot \frac{mc^2}{2}$$

pe care o putem aplica unui mol de gaz (care conţine $N = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ molecule) şi obţinem

$$P = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \frac{mc^2}{2} \qquad (1)$$

care reprezintă ecuaţia fundamentală a teoriei cinetice.

Experienţele confirmă că această relaţie fundamentală este perfect justă deşi ea a fost dedusă făcând anumite ipoteze pentru simplificare. Din ea se pot deduce legile gazelor *perfecte*: Boyle-Mariotte, Avogadro, etc.

In concluzie, presiunea gazelor nu este altceva decât *efectul ciocnirilor moleculare de pereţii vasului.* Desigur că apăsarea produsă prin ciocnirea unei molecule este extraordinar de mică; atunci, cum se explică faptul că locomotiva este mişcată doar de ciocnirile pe care le produc moleculele vaporilor de apă asupra feţelor pistonului? Pentrucă, pe deoparte şi numărul ciocnirilor pe secundă a unei molecule este de câteva miliarde, iar pe de altă parte, numărul moleculelor cuprinse în corpul de pompă este de miliarde de miliarde de molecule. Efectul este uriaş: mişcarea locomotivei şi a întregului tren.

4. Ce este temperatura?

Ştiind acum, că totalitatea energiilor cinetice ale moleculelor în mişcarea lor desordonată este căldura, ne întrebăm ce este temperatura? Relaţia (1) o putem scrie:

$$PV = \frac{2}{3} N \cdot \frac{mc^2}{2}$$

ştim că, $PV = RT$

Deci, $\frac{2}{3} N \cdot \frac{mc^2}{2} = RT$

De unde

$$\overline{W} = \frac{mc^2}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N} T = \frac{3}{2} kT. \qquad (2)$$

Există deci, o proporţionalitate directă între energia cinetică a unei singure molecule $\overline{W}$ şi temperatura absolută T a gazului (Raportul $\frac{R}{N} = k$ se numeşte constanta lui Boltzmann). Inseamnă că energia cinetică de translaţie a unei singure molecule este o măsură pentru temperatură.

Dar toate moleculele gazului au aceeaşi masă, încât din:

$$T = \frac{2}{3k} \cdot \frac{mc^2}{2}$$

deducem că T depinde în fond de viteza moleculară. Prin urmare, *temperatura este manifestarea macroscopică a vitezei moleculare.* Un corp este mai cald când vitezele moleculelor lui în mişcarea desordonată sunt mai mari. O concluzie importantă a teoriei lui Lomonosov a fost şi stabilirea existenţii celei mai joase temperaturi la care se opreşte mişcarea calorică a particulelor, adică stabilirea lui zero absolut.

Un corp care se răceşte din ce în ce mai mult este un corp ale cărui molecule se mişcă din ce în ce mai încet, iar dacă se răceşte până la zero absolut $-273°$, moleculele lui ar înceta să se mai mişte.

Aceasta însă, nu înseamnă că a încetat mişcarea materiei. Mişcarea termică este numai una din formele de mişcare a materiei. Chiar la zero absolut electronii continuă să se mişte în jurul nucleului iar nucleonii se mişcă în interiorul nucleului, iar ca rezultat al variaţiilor câmpului electromagnetic, apar radiaţiunile.

După cum repaosul mecanic al corpurilor nu înseamnă stingerea mişcării moleculare, tot aşa repaosul molecular la temperatura de zero absolut nu înseamnă încetarea mişcărilor intra-atomice şi intra-nucleare, şi nici a câmpurilor lor.

Zero absolut, este luat ca origină pentru scara temperaturilor absolute. Temperaturile din apro-

pierea lui zero absolut se numesc temperaturi foarte joase şi prezintă un interes deosebit pentru ştiinţă şi tehnică deoarece substanţele se comportă în mod diferit.

Fizicienii sovietici, mai ales Capiţa, se ocupă cu studiul lor.

Temperaturile pe care le utilizează frigo-tehnica sunt temperaturi joase, iar temperaturile de pe la 1500° în sus, le numim temperaturi înalte. La temperaturi înalte moleculele capătă viteze foarte mari. De exemplu, molecula de H_2 la temperatura arcului electric ar avea viteza de 6500 m/s iar în centrul stelelor 651 km/s dacă ea ar putea rezista fără să se descompună.

5. Viteza moleculelor

Am vorbit până acum despre viteza moleculelor unui gaz, ca şi cum ea ar fi aceeaşi pentru toate moleculele gazului. Lucrul acesta nu corespunde însă realităţii. Moleculele se ciocnesc între ele de miliarde de ori pe secundă. Legile mecanicii arată că după ciocnire două corpuri elastice au alte viteze decât înainte de ciocnire, deci, ele îşi schimbă între ele o parte din energia lor cinetică.

Să considerăm de exemplu, două molecule (fig. 6a) care se mişcă cu aceeaşi viteză în direcţii

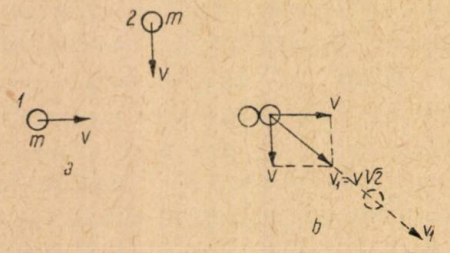


Fig. 6

perpendiculare. Molecula 1 ciocneşte lateral molecula 2 şi îi comunică întreaga ei energie (masele lor fiind egale). Molecula 2 va avea după ciocnire viteza rezultantă $v_1=v\sqrt{2}$ (fig. 6 b), deci, energia cinetică $W=\frac{m}{2}v_2^2=mv^2$, dublă faţă de cea iniţială. Este foarte puţin probabil ca molecula să sufere mereu astfel de ciocniri favorabile. Ciocnirile pot fi oricum, molecula 2 putând şi să cedeze energia nu numai să primească. Se poate însă întâmpla ca din uriaşul număr de molecule prezente într'un gaz, câteva să sufere succesiv mai multe ciocniri de acest fel, care să le crească foarte mult viteza şi energia, pe când altele îşi vor scădea mult viteza şi energia. Prin urmare, nu poate fi vorba despre o aceeaşi viteză a tuturor moleculelor. Într'un moment anumit, există molecule cu cele mai variate viteze.

Aplicând mecanica statistică, Maxwell a căutat legea de repartiţie a vitezelor moleculare într'un gaz care se află în echilibru termic. El a găsit că vitezele tuturor moleculelor se schimbă necontenit dar *legea lor de repartiţie rămâne aceeaşi*, adică, deşi mereu altele, totuşi, *acelaş număr* de molecule au *aceeaşi viteză*. Legea se reprezintă printr'o curbă de forma arătată în figura 7.

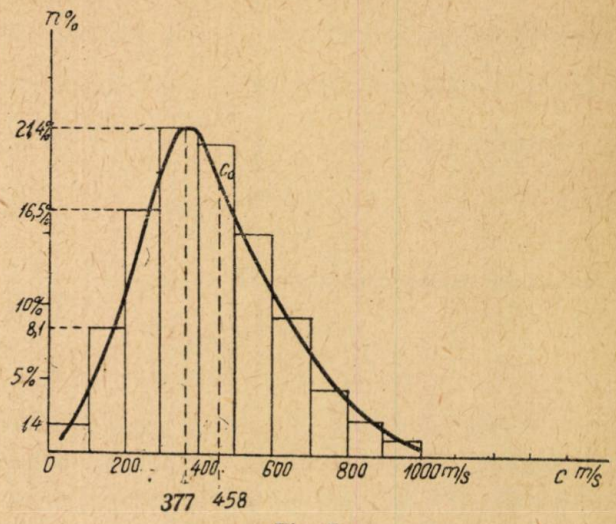


Fig 7

Această lege de repartiţie a vitezelor a fost verificată experimental şi ne putem face o idee despre ea, analizând modul de repartiţie a vitezelor moleculelor de oxigen la 0°C. Dintr'un milion de molecule 14.000 au viteze cuprinse între 0—100 m/s, 81.000 între 100—200 m/s, 165.000 între 200—300 m/s, 214.000 între 300—400 m/s, 206.000 între 400—500 m/s, 151.000 între 500—600 m/s, 92.000 între 600—700 m/s, 48.000 între 700—800 m/s, 20.000 între 800—900 m/s şi numai 9.000 au vitezele peste 900 m/s. Reprezentând grafic vitezele pe abscisă, iar pe ordonată numărul de molecule care au vitezele cuprinse în intervalul 0—1000 m/s, găsim rezultatul din figură care reprezintă curba în formă de clopot. Se constată că viteza de 377 m/s este cel mai des întâlnită pentrucă o au 220.000 molecule, adică 21%.

Din această mulţime de viteze care este aceia care corespunde calculelor făcute înainte? Este ea viteza medie? Notând cu c_1, c_2, $c_3 \ldots c_n$ vitezele fiecăreia din cele N molecule dintr'un mol de gaz, să calculăm energia moleculară de translaţie, W, numită şi energia internă:

$$W=\sum \overline{W}_k=\frac{m}{2}\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2+\ldots c_N^2\right)=\frac{m}{2}Nc^2$$

unde

$$c^2=\frac{c_1^2+c_2^2+\ldots c_N^2}{N}$$

este media patratelor vitezelor moleculelor numită *viteza medie patratică*. Această valoare intră în calculele termice. Ea poate fi dedusă ţinând seama de relaţia (1) şi de cea precedentă astfel:

$$PV = \frac{2}{3} N \frac{mc^2}{2} = \frac{2}{3} W = \frac{2}{3} \frac{Mc^2}{2} = \frac{1}{3} Mc^2$$

M fiind masa moleculară.

De unde:

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{M}{V} \cdot c^2 = \frac{1}{3} \rho c^2,$$

ρ fiind densitatea gazului.

De aici obţinem:

la 0°C $$c_0 = \sqrt{\frac{3P}{\rho}}. \qquad (3)$$

In cazul hidrogenului la presiune normală şi la 0°C când $\rho = 0{,}0000899$ g/cm³ şi $p = 1033$ g/cm² = 980.1033 dyne/cm² viteza medie patratică va fi:

$$c_0 = \sqrt{\frac{3.980.1033}{0{,}0000899}} \approx 184000 \text{ cm/s} = 1840 \text{ m/s}$$

Se poate găsi o relaţie mai simplă pentru a calcula pe c_0:

$$PV = RT = \frac{1}{3} Mc^2 \text{ de unde}$$

$$c_0 = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \qquad (4)$$

şi înlocuind $R = 8{,}31$ joule, obţinem:

$$c_0 = 158 \sqrt{\frac{T}{M}} \text{ m/s.} \qquad (5)$$

Cu ajutorul relaţiei (5) găsim că moleculele de azot din aer la 0°C au $c_0 = 490$ m/s, iar cele de oxigen au $c_0 = 458$ m/s. Din cauză că moleculele de azot sunt de 4 ori mai multe decât cele de oxigen, putem considera viteza moleculelor de azot drept viteză a moleculelor de aer. Vara la 40°C moleculele de aer au 522 m/s iar iarna la −30°C au 458. Cu alte cuvinte, deosebirea între zăpuşeala unei zile de vară şi gerul unei zile de iarnă se datoreşte faptului că moleculele de aer şi-au micşorat viteza cu 64 m/s !

Relaţia (2) ne arată că la aceiaşi temperatură toate gazele au aceiaşi energie moleculară, deci $m_1 c_1^2 = m_2 c_2^2$ de unde:

$$\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{c_2}{c_1}$$

adică vitezele medii patratice a două gaze la aceiaşi temperatură sunt invers proporţionale cu rădăcina patrată a maselor lor moleculare.

De aceia moleculele de hidrogen au viteza moleculară de 4 ori mai mare decât ale oxigenului la aceeaşi temperatură.

6. Forţe moleculare

Cele descrise până acum s'au bazat pe însuşirile gazului perfect, adică a unui gaz în care moleculele au volumul real neglijabil faţă de volumul vasului în care se găseşte, iar între molecule nu se exercită forţe de atracţie. In realitate însă, volumul moleculelor nu poate fi neglijat, iar între molecule se manifestă forţe de interacţiune mai ales când gazul este comprimat, deci, când distanţa dintre molecule scade. Intre moleculele unui gaz la presiune obişnuită, distanţele medii sunt de circa 10^{-5} cm. La lichide însă, distanţele moleculare sunt mult mai mici, încât atracţia dintre molecule este permanentă şi suficient de mare ca să se asigure lichidului un volum constant, dar să lase moleculelor posibilitatea să alunece între ele, sau să oscileze în jurul unei poziţii medii, global aceste mişcări rămânând desordonate. Când temperatura creşte, viteza, deci energia cinetică medie moleculară creşte şi ea, încât distanţele intermoleculare cresc; când ajung la distanţa maximă la care mai sunt acţiuni intermoleculare, numite forţe Van der Waals, lichidul se transformă în gaz, adică fierbe. Evaporarea lichidului, care se face la orice temperatură, se explică prin faptul că la orice temperatură sunt o parte din molecule cu viteză mult mai mare decât viteza medie patratică, deci pot să iasă din stratul superficial depăşind distanţa de acţiune moleculară.

Prin răcire, lichidul pierde din energia lui moleculară, distanţele intermoleculare scad, până ce moleculele se apropie la o distanţă în care atracţia dintre molecule este compensată de respingerea lor şi se obţine o stare de echilibru, solidă. In această stare, forţele intermoleculare sunt aşa de puternice încât se opun nu numai la variaţia de volum dar chiar şi la variaţia formei corpului. In cazul unui cristal, moleculele au o repartizare spaţială perfect simetrică, iar mişcările lor sunt numai oscilaţii în jurul poziţiei de echilibru. Studiul forţelor Van der Waals nu este complect pus la punct şi se face cu ajutorul teoriei cuantice.

Vom arăta schema de manifestare a acestor forţe intermoleculare.

S'a constatat că atunci când creşte distanţa, forţele de respingere scad mai repede decât cele de atracţie. Pentru o anumită distanţă r_0, cele două

forţe sunt egale, de aceia moleculele A şi B între care se exercită ele, sunt în echilibru. Dacă moleculele s'ar apropia la distanţă mai mică decât r_0, forţele de repulsie predomină şi moleculele sunt respinse. Dacă distanţa dintre ele este mai mare

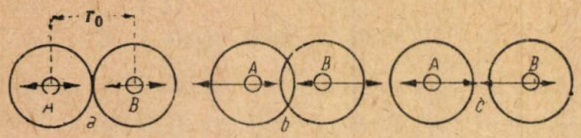


Fig. 8

decât r_0, ele sunt atrase. Convenind să notăm forţele de atracţie cu semnul + iar pe cele de respingere cu semnul —, putem reprezenta variaţia forţelor Van der Waals cu distanţa, prin curba *GYNI*.

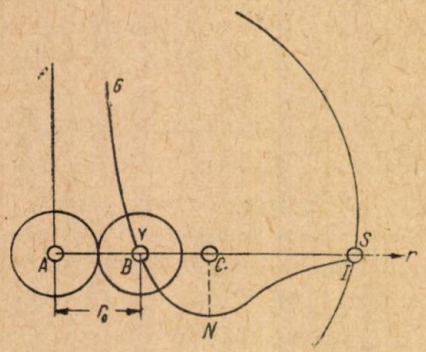


Fig. 9

Fiind în poziţia B, o moleculă este în echilibru faţă de molecula A, interacţiunea lor fiind nulă. Dacă r scade sub valoarea r_0, forţa Van der Waals de respingere creşte brusc şi molecula B este respinsă ca şi când s'ar fi ciocnit elastic cu molecula A. Când r creşte, forţele de atracţie predomină, iar când molecula ajunge în C, forţa de atracţie e maximă $CN = f$ şi dela această distanţă atracţia scade până la anulare (molecula în S).

Distanţa AS până la care se simte acţiunea în jurul unei molecule este de ordinul 10^{-7} până la 10^{-6} cm, şi se numeşte sferă de acţiune moleculară, o sferă închipuită având această rază.

Când vorbim despre ciocniri moleculare, de fapt nu moleculele se ciocnesc, ci ele se apropie până ce distanţa dintre ele este $r = r_0$ ca şi cum fiecare moleculă ar fi înconjurată de o sferă perfect elastică având raza egală cu $\frac{r_0}{2}$. In cazul ciocnirii a 2 molecule, ele se apropie până când intră în joc forţele de respingere.

In cazul comprimării unui corp, moleculele se apropie sub valoarea r_0, intră în joc forţele Van der Waals de respingere, care dau reacţiunea elastică a corpului şi deformarea lui încetează atunci când încetează comprimarea. Dacă însă, un corp este întins, moleculele se depărtează peste valoarea r_0, intră în joc forţele Van der Waals de atracţie, care dau elasticitatea corpului şi deformarea lui încetează când încetează şi întinderea.

Depărtarea moleculelor se mai produce şi prin încălzirea corpului, când creşterea vitezei de agitaţie termică face să crească distanţa dintre molecule, dilatarea, apărând iarăşi forţele Van der Waals de respingere.

Acestea sunt forţele produse în cazul dilatării, identice cu cele manifestate la elasticitate. Ele sparg vasele în care înghiaţă apa, ele strâng cercul în jurul roţii, etc.

In lichide şi solide, moleculele se aşează în poziţia de echilibru pe când la gaze moleculele sunt independente una faţă de alta, distanţa lor fiind de circa 10^{-5} cm, mai mare decât sfera de acţiune moleculară, deaceea, le putem considera ca fiind gaze perfecte.

Ajunşi la sfârşit, înţelegem că fenomenele macroscopice de presiune, căldură, temperatură, sunt manifestări ale unor fenomene microscopice legate de mişcarea moleculelor.

Presiunea rezultă din ciocnirile moleculelor asupra pereţilor vasului, temperatura este legată de energia cinetică medie moleculară, adică de viteza medie patratică, iar căldura este energia totală a moleculelor în mişcarea lor haotică, aşa cum arată teoria cinetico-moleculară a materiei.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

CONSTRUIREA UNUI DISPOZITIV PENTRU EXPERIENŢE DE OPTICĂ

DUPĂ UN ARTICOL AL LUI F. S. IACOVENCO DIN FIZICA IN ŞCOALĂ Nr. 5, MOSCOVA 1953

Pentru a demonstra o serie de experienţe de optică, la lumina zilei, se poate construi cu uşurinţă un dispozitiv, care să fie folosit cu succes la lecţii. Cu ajutorul acestui dispozitiv se poate demonstra propagarea luminei în linie dreaptă, legile reflexiei şi refracţiei luminii, mersul razei de lumină printr'o lamă cu feţe paralele, printr'o prismă, reflexia totală şi altele.

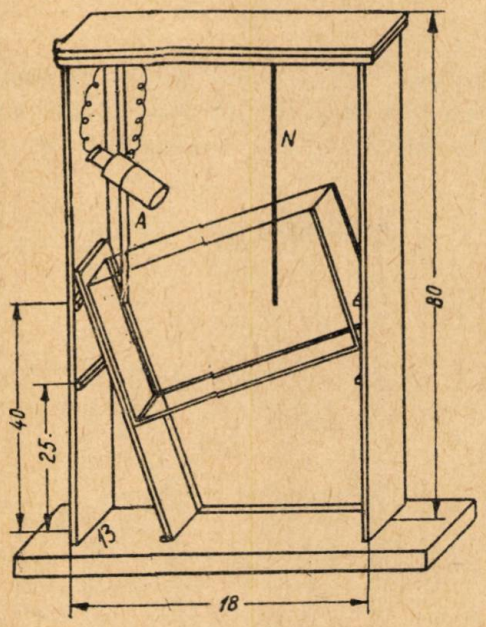


Fig. 1

Dispozitivul constă dintr'o cutie, de formă paralelipipedică, fără peretele din faţă, capacul fiind demontabil (fig. 1).

Pe partea dinăuntru a capacului, deacurmezişul acestuia sunt fixate două şipci, iar dealungul lui încă una sub care se fixează susţinătorul sursei de lumină şi o vergea verticală *N*.

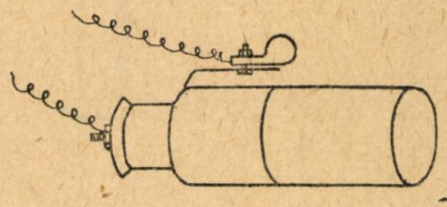
Drept sursă de lumină se foloseşte o lanternă de buzunar, alimentată de o baterie obişnuită (fig. 2).

Sursa de lumină constă din următoarele părţi: un dop de cauciuc *1* prevăzut cu un şurub prin care trece curentul electric la bec, corpul sursei de lumină *2*, o oglindă parabolică dela lanterna de buzunar *3*, un bec electric *4*, două diafragme cu fantele *5* şi *7*, un tub cilindric 6 pentru fixarea diafragmelor, a oglinzii şi a becului, un capac *8* cu care se acoperă corpul *2* şi o lentilă *9*.

Construcţia sursei de lumină permite proiectarea unui fascicol de lumină din aer în apă şi invers.

Sursa de lumină poate fi rotită în jurul unui ax de fixare, în diferite direcţii şi deplasată în sus şi în jos pe suportul rotund vertical *A* (fig. 1). Una din părţile esenţiale ale dispozitivului este o cutie cu peretele din faţă şi fundul din sticlă. Pentru construirea ei trebue pregătiţi trei pereţi ai cutiei şi în şanţurile făcute în prealabil, montat fundul de sticlă, iar de sus — peretele de sticlă din faţă (fig. 3).

Cutia se vopseşte cu vopsea de ulei, iar după uscarea ei, muchiile din interior şi din exterior se lipesc cu un tifon muiat în vopsea. După uscare se repetă operaţia (se mai lipeşte un rând de tifon). Aşa se construeşte un vas etanş. Dispozitivul are o policioară de lemn care poate fi fixată la nevoie



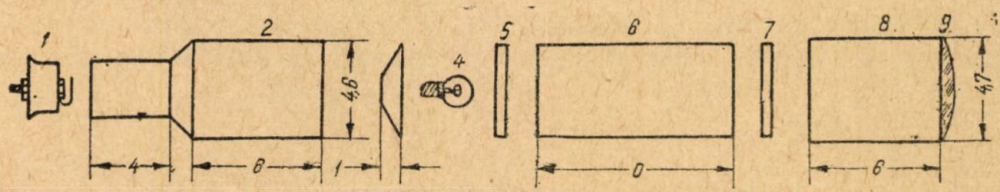


Fig. 2

Pe pereţii laterali ai cutiei sunt fixate câte două şipci la distanţe egale de fundul dispozitivului.

în mijlocul dispozitivului, şi o oglindă dreptunghiulară care poate fi aşezată pe fundul vasului etanş.

Pentru a demonstra propagarea luminii în linie dreaptă, se va lăsa în corpul dispozitivului numai sursa de lumină, ridicând-o cât mai sus spre capacul cutiei şi conectând-o cu bateria.

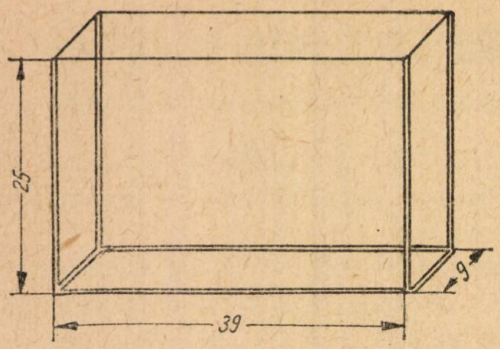


Fig. 3

Pe peretele din spate al dispozitivului se va observa o dungă dreaptă de lumină. Lăţimea acestei dungi de lumină proiectată depinde de dimensiunile fantelor aflate în diafragmele sursei de lumină.

Pentru a demonstra reflexia luminii sursa de lumină trebue coborîtă puţin, şi îndreptată spre oglinda care este aşezată pe policioara din mijloc, în corpul dispozitivului (fig. 4).

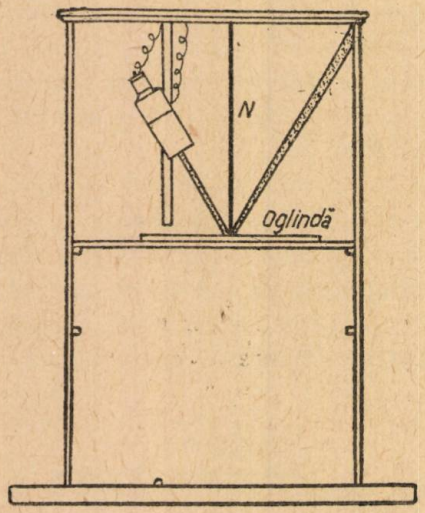


Fig. 4

Fascicolele de lumină, incident şi reflectat, se văd proiectate pe peretele din spate al dispozitivului.

Rotind sursa de lumină în jurul axului vertical, se poate verifica de câteva ori legea reflexiei luminii.

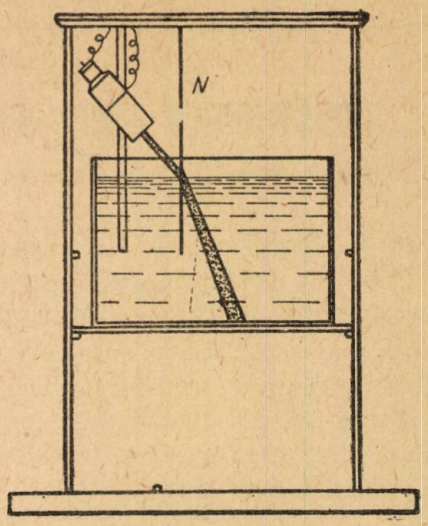


Fig. 5

Aranjarea dispozitivului pentru a demonstra refracţia luminii şi mersul unui fascicol de raze printr'o prismă optică este arătată în figurile 5 şi 6.

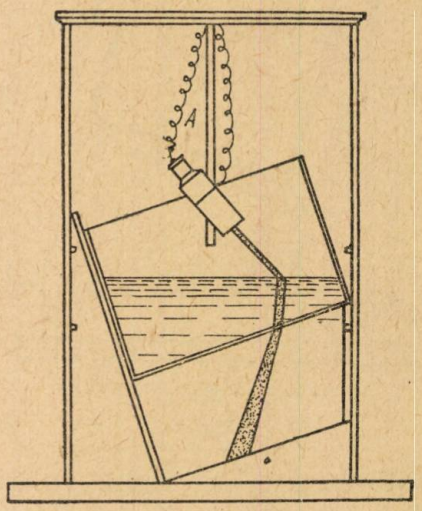


Fig. 6

Prin camuflarea ferestrelor şi întrebuinţarea unei surse de lumină puternice eficacitatea experienţei se înbunătăţeşte. Dispozitivul este avantajos prin faptul că toate experienţele sunt văzute bine de întreaga clasă, se construeşte uşor şi este oricând utilizabil. Un astfel de dispozitiv poate fi construit în orice şcoală.

PROBLEME REZOLVATE

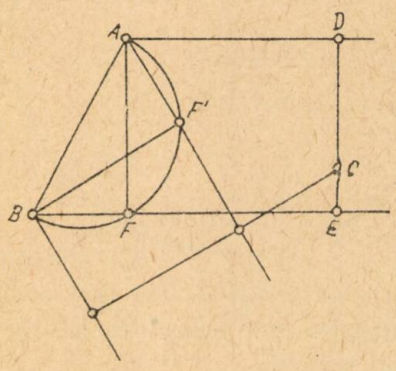
Problema E: 300

Se dau trei puncte fixe A,B,C. Să se ducă prin A şi B două paralele astfel ca segmentul interceptat de ele pe perpendiculara lor comună, dusă prin C să aibă o lungime dată, b.

Câte soluţii sunt?

Matei Nazarie
elev, Bucureşti

Soluţie. Presupunând problema rezolvată, notăm cu D şi E intersecţiile celor două paralele cu perpendiculara lor comună dusă prin C, iar cu F notăm piciorul perpendicularei dusă prin A pe BE



Deoarece $ADEF$ este un dreptunghi, $AF = DE = l$ şi putem construi astfel triunghiul dreptunghic AFB, în care cunoaştem ipotenuza AB şi cateta AF.

Rezultă construcţia următoare:

Se descrie pe AB un semicerc pe care se ia punctul F astfel ca $AF = l$; prelungirea lui BF şi paralela prin A la aceasta taie pe perpendiculara comună dusă prin C un segment de lungime l.

Dacă luăm cateta $BF' = l$, obţinem soluţia doua.

Pentru a putea face construcţia este necesar să putem construi triunghiul dreptunghic AFB, deci trebue să avem $AB \geqslant l$.

Problema E: 323

In triunghiul echilateral ABC se prelungesc laturile AB, AC, BC în acelaş sens, respectiv cu lungimile AA', CC', BB', astfel ca $AB = AA' = CC' = BB'$. Să se calculeze aria $A'B'C'$ în funcţie de latura triunghiului ABC.

S. V. Ionescu
elev, Piteşti

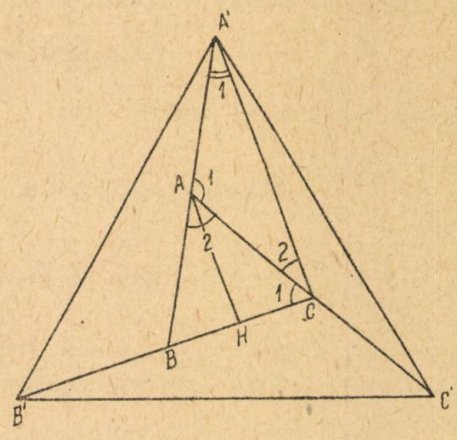
Soluţie. Fie a latura triunghiului ABC.

$$A_1 = 180° - A_2 = 180° - 60° = 120°;$$

triunghiul $AA'C$ este isoscel ($AA' = AC$). Rezultă: $C_2 = A_1$

$$C_2 + A_1 = 180° - A_1 = 180° - 120° = 60°;$$

$$C_2 = A_1 = \frac{60°}{2} = 30°; \quad C_1 + C_2 = 60° + 30° = 90°$$



Rezultă că triunghiul $A'CB'$ este dreptunghic.

Dreapta AH (înălţimea în ABC) deoarece uneşte mijloacele lui BA' şi BC este paralelă cu $A'C$ şi egală cu jumătate din ea.

Insă: $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; a = latura triunghiului ABC.

Deci conform celor spuse mai sus:

$$A'C = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3};$$

Sau din triunghiul $A'BC$;

$$A'C^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2; \quad A'C = a\sqrt{3}:$$

$$S_{A'CB'} = \frac{A'C \cdot CB'}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot 2a}{2} = a^2\sqrt{3};$$

$$S_{A'CB} = \frac{A'C \cdot CB}{2} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{A'BB'} = S_{A'CB'} - S_{A'CB} = a^2\sqrt{3} - \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2};$$

Insă triunghiurile $A'BB'$, $A'AC'$, $B'CC'$ sunt egale. Deci:

$$S_{A'BB'} + S_{A'AC'} + S_{B'CC'} = 3\frac{a^2\sqrt{3}}{2};$$

$$S_{ABC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{A'B'C'} = S_{A'BB'} + S_{A'AC'} + S_{B'CC'} + S_{ABC} =$$

$$= \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Problema 645

Două coarde de aceeași lungime însă neegal întinse, una de fier și alta de cupru sunt la unison. Coarda de cupru fiind de 3 ori mai întinsă decât cea de fier și raportul densităților celor două metale fiind 1,15 *se cere:* a) *Raportul diametrelor lor,* b) *Raportul tensiunilor celor două coarde astfel ca numărul de vibrații al coardei de fier să fie* $\frac{3}{2}$ *din numărul de vibrații al coardei de cupru.*

Cucula W. Dacos

Soluție. a) Numărul de vibrații este

$$n = \frac{1}{rl}\sqrt{\frac{gG}{\pi d}} \text{ pentru coarda de Cu}$$

$$n_1 = \frac{1}{r_1 l}\sqrt{\frac{gG_1}{\pi d_1}} \text{ pentru coarda de Fe.}$$

Coardele fiind la unison avem $n = n_1$ și ținând seamă că $G/G_1 = 3$ și $d/d_1 = 1{,}15$ rezultă că raportul diametrelor lor este

$$\frac{r}{r_1} = \frac{n_1\sqrt{Gd_1}}{n\sqrt{G_1 d}} = \sqrt{\frac{3}{1{,}15}} = 1{,}615$$

b) In acest caz

$$\frac{n}{n_1} = \frac{3}{2}\ ; \quad \frac{d}{d_1} = 1{,}15.$$

Impărțind relațiile scrise mai sus găsim

$$\frac{G}{G_1} = \frac{d}{d_1}\left(\frac{n}{n_1}\right)^2\left(\frac{r}{r_1}\right)^2 = 1{,}15 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{1{,}15} = \frac{4}{3}\ .$$

Problema 729

Se dă unghiul xoy. Pe laturile ox, oy se iau respectiv punctele A și B astfel ca $OA + OB = c$, *lungime constantă dată. Se cere locul centrului cercului circumscris triunghiului OAB.*

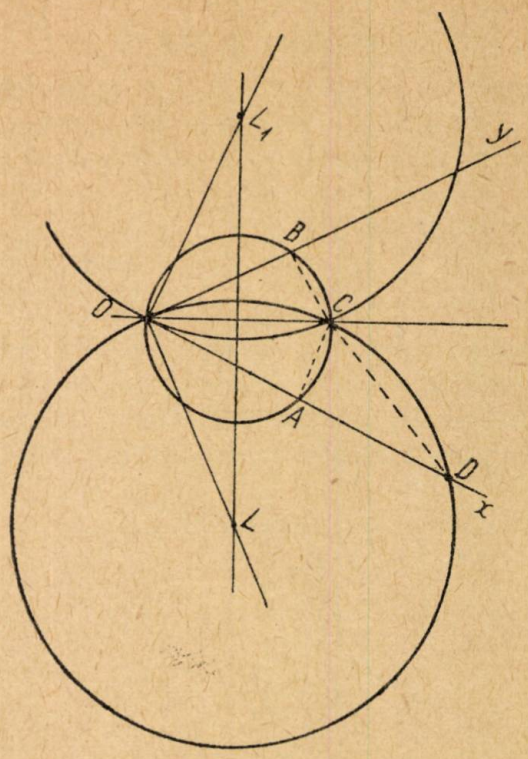
Marius V. Iosifescu
elev, Pitești

Soluție: Ducem bisectoarea unghiului *xoy*. Ea taie cercul *OAB* în *C*. Să arătăm că *C* este un punct fix.

Pentru aceasta luăm pe *ox* segmentul $AD = OB$. Deoarece $OD = OA + OB = c$, *D* este fix.

OC fiind bisectoarea avem $CB = CA$, iar patrulaterul *OBCA* fiind înscris în cercul *OAB*, avem $\sphericalangle OBC = \sphericalangle DAC$. Rezultă că triunghiurile *OBC* și *ACD* sunt egale, deci că $OC = CD$. Deci *C* se află pe bisectoarea $\sphericalangle xoy$ și pe mediatoarea segmentului fix *OD*; *C* este deci, fix.

Locul centrului cercului *OAB* este o porțiune din mediatoarea segmentului *OC*.



Punctele limită ale locului sunt centrele cercurilor tangente în *O* uneia din laturile *Ox*, *Oy* și care trec prin *C*.

Aceasta corespunde situației în care unul din punctele *A* sau *B* este în *O*.

Pe figură punctele limită sunt *L* și L_1.

Problema 746

Să se determine valorile pe care trebue să le ia m, *pentruca polinomul*

$$(m^2 - 5m + 4)\,x^2 - 2(m+2)\,x + 2 > 0$$

oricare ar fi valorile reale ale lui x.

Simon St. Petre

Soluție. Se știe că semnul trinomului de gr. II, dacă rădăcinile sunt egale sau complexe, este semnul coeficientului lui x^2.

Pentruca rădăcinile ecuației de gr. II să fie egale sau complexe, trebue ca realizantul să fie negativ sau nul. Deci:

$$(m+2)^2 - 2(m^2 - 5m + 4) \leqslant 0$$

$$-m^2 + 14m - 4 \leqslant 0 \quad \text{sau} \quad m^2 - 14m + 4 \geqslant 0$$

$$m_{1,2} = 7 \pm 3\sqrt{5}.$$

Trebue să avem

$$m \geqslant 7 + 3\sqrt{5} \quad \text{sau} \quad m \leqslant 7 - 3\sqrt{5}.$$

In acest caz realizantul este negativ sau nul și deci, semnul trinomului este semnul coeficientului lui x^2.

Deci semnul polinomului dat, în cazul acesta este semnul lui $m^2 - 5m + 4$.

Cum polinomul trebue să fie pozitiv, trebue deci ca

$$m^2 - 5m + 4 > 0 \qquad (1)$$

Rădăcinile lui $m^2 - 5m + 4$ sunt 1 şi 4.

Pentruca relaţia (1) să fie satisfăcută trebue ca $m > 4$ sau $m < 1$.

Deci avem următoarele rezultate:

$$m \geqslant 7 + 3\sqrt{5} \quad \text{şi} \quad m > 4 \qquad (I)$$

$$m \leqslant 7 - 3\sqrt{5} \quad \text{şi} \quad m < 1 \qquad (II)$$

Din (I) rezultă

$$m \geqslant 7 + 3\sqrt{5}$$

şi din (II) rezultă

$$m \leqslant 7 - 3\sqrt{5},$$

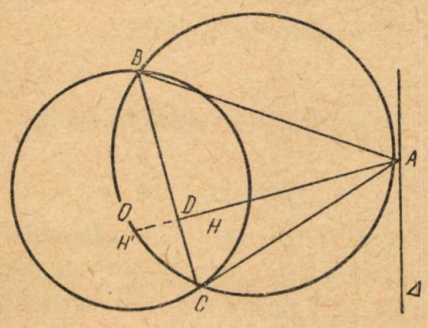
valori pentru care, polinomul dat este pozitiv oricare ar fi valorile reale ale lui x.

Problema 750

Se dă un cerc O, o dreaptă Δ şi un punct D în interiorul cercului. Se cere locul geometric al ortocentrului H al triunghiului ABC, care are vârfurile B şi C pe cercul (O), vârful A pe dreapta Δ şi în care D este piciorul înălţimii coborîte din A pe BC.

Marius Iosifescu
elev, Piteşti

Soluţie. Conform unei teoreme cunoscute, ortocentrul unui triunghi şi punctul în care o înălţime taie cercul circumscris sunt simetrice în raport cu piciorul înălţimii.



Deci dacă H' este punctul în care AD taie cercul ABC, atunci $DH' = DH$. Scriind puterea lui D faţă de cercul ABC obţinem

$DH' \cdot DA = -DH \cdot DA = DB \cdot DC =$ puterea lui D faţă de cercul (O) = constant.

Relaţia $DH \cdot DA =$ constant, ne arată că H descrie figura inversă dreptei Δ, deci un cerc care trece prin D şi al cărui diametru dus prin acest punct este perpendicular pe Δ.

Problema 764

Prin acţiunea unui acid asupra unei cantităţi de marmoră ($CaCO_3$) s'au obţinut 1670 cm³ bioxid de carbon la temperatura de 27°C şi la presiunea de 1000 mm Hg. Să se determine cantitatea de marmoră intrată în reacţie dacă densitatea bioxidului de carbon la 0°C şi la presiunea de 760 mm Hg este de 0,002.

C. Dragomir
elev, Piteşti

Soluţie. O moleculă de $CaCO_3$ dă naştere unei molecule de CO_2. Rezultă că 100 g marmoră generează 44 g bioxid de carbon.

Din ecuaţia $PV = P_0V_0(1 + \alpha t)$ obţinem volumul de CO_2 la 0° şi 760 mmHg

$$1000 \times 1670 = 760\ V_0\left(1 + \frac{27}{273}\right)$$

$$V_0 = 2000 \text{ cm}^3$$

Greutatea bioxidului de carbon rezultat este deci

$$G = 0{,}002 \times 2000 = 4 \text{ g}.$$

Ţinând seamă de observaţia făcută mai sus, greutatea marmorei intrate în reacţie este

$$\frac{4 \times 100}{44} = 9{,}09 \text{ g}.$$

Problema 789

Un răcitor funcţionează pe principiul compresiunii, iar compresorul reprezintă un motor de putere P (exprimată în CP). Să se calculeze frigul produs de răcitor în timp de h *ore, dacă evaporatorul este menţinut la temperatura* t_1, *tempertura mediului înconjurător fiind* t *şi presupunând că nu există pierderi de căldură.*

Ioan Licea
elev, Galaţi

Soluţie. Evaporatorul menţinut la temperatura t_1 trebue să evacueze în mod continuu în exterior căldură. Randamentul unei maşini ideale care ar executa acest transport de energie este

$$\eta = \frac{273 + t - (237 + t_1)}{273 + t} = \frac{t - t_1}{273 + t}.$$

Prin urmare cu o cheltuială de energie mecanică egală cu 1 Joule se cedează exteriorului o cantitate de căldură egală cu

$$\frac{273 + t}{t - t_1} \text{ jouli}.$$

Frigul produs de răcitor este deci

$$\frac{Ph\times 75\times 3600\times 9{,}81\times(273+t)}{1000\times 4{,}18\times(t-t_1)}=$$

$$=633{,}65\times\frac{Ph\,(273+t)}{t-t_1}\text{ frigorii.}$$

Problema 793

Intr'un cazan închis se află 1 *kg aer la* 17°C *şi o atmosferă. Prin încălzire, presiunea s'a ridicat la* 4 *atmosfere. Să se afle de câtă căldură a fost nevoie* ($C_v = 0{,}18$).

Petre Padar
elev, Bucureşti

Soluţie. Din formula:

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{1+\alpha t_2}{1+\alpha t_1}$$

$$4=\frac{273+t_2}{290}$$

avem

$$t_2 = 887°\text{C}$$

Cantitatea de căldură necesară este

$$Q = mC_v(t_2-t_1) = 1\times 0{,}18\times 870$$

$$Q = 156{,}6\text{ Kcal.}$$

Problema 795

Să se construiască numai cu rigla şi compasul expresia:

$$E=\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{6+\sqrt{2}}}}-$$

$$-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.$$

Gh. Gh. Păun
elev, Piteşti

Soluţie. Expresiile:

$$\sqrt{2\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{6+\sqrt{2}}}}$$

şi

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$$

sunt respectiv apotema poligonului regulat de 48 laturi înscris în cercul de rază $2\sqrt[4]{2}$ şi latura poligonului regulat de 32 laturi înscris în cercul de rază 1.

Impărţirea cercului în 48 sau 32 părţi egale se face cu uşurinţă şi obţinem astfel

$$a_{48}\,(R=2\sqrt[4]{2})\quad\text{şi}\quad l_{32}(R=1).$$

Problema 796

In triunghiul oarecare ABC se notează cu I şi O respectiv centrul cercului înscris şi centrul cercului circumscris triunghiului. Fie I_1, I_2, I_3 şi O_1, O_2, O_3 respectiv simetricele lui I şi O faţă de laturile BC, CA, AB. Să se arate că cercurile BI_1C, CI_2A, AI_3B au un punct comun M, iar cercurile BO_1C, CO_2A, AO_3B au deasemenea un punct comun N.

Mihail I. Popescu
elev, Craiova

Soluţie. Fie $A > B > C$;

$$\sphericalangle BI_1C = \sphericalangle BIC = 90° + \frac{A}{2}$$

$$\sphericalangle CI_2A = \sphericalangle CIA = 90° + \frac{B}{2}$$

$$\sphericalangle AI_3B = \sphericalangle AIB = 90° + \frac{C}{2}$$

Fie M a doua intersecţie a cercurilor CI_2A, AI_3B. Vom avea

$$\sphericalangle AMC = 180° - \sphericalangle CI_2A = 90 - \frac{B}{2}$$

$$\sphericalangle AMB = 180° - \sphericalangle AI_3B = 90° - \frac{C}{2}$$

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle AMB + \sphericalangle AMC = 90° + \frac{A}{2} = \sphericalangle BI_1C.$$

Unghiurile AMC şi AMB fiind ascuţite, punctul M se află în exteriorul triunghiului ABC, de aceeaşi parte a laturii BC cu punctul I_1.

Rezultă că patrulaterul $BCMI_1$ este inscriptibil deci că cercul BI_1C trece prin M.

O demonstraţie analoagă pentru cercurile BO_1C, CO_2A, AO_3B remarcând că

$$\sphericalangle CO_2A = \sphericalangle COA = 2B$$

$$\sphericalangle AO_3B = \sphericalangle AOB = 2C$$

$$\sphericalangle BO_1C = \sphericalangle BOC = 2A \quad\text{sau}\quad 360° - 2A$$

după cum triunghiul ABC este ascuţitunghi sau obtusunghi ($A > 90°$). In primul caz avem

$$\sphericalangle BNC = \sphericalangle BO_1C;$$

în al doilea caz

$$\sphericalangle BNC + \sphericalangle BO_1C = 180°.$$

Problema 819

In aparatul sovietic de radio «Record» înfăşurarea primară a transformatorului de alimentare are 700 *spire şi e conectată la* 127 *volţi. Câte spire are înfăşurarea secundară dacă ea serveşte pentru încălzirea lămpilor la o tensiune de* 6,3 *volţi?*

* * *

Soluţie. Avem relaţia

$$\frac{N_1}{N_2}=\frac{U_1}{U_2},\quad\text{deci}$$

$$N_2=\frac{N_1\cdot U_2}{U_1}=\frac{700\cdot 6{,}3}{127}=34{,}7\text{ spire}$$

Problema 823

Fiecare agregat al centralelor de pompare al canalului Volga-Don pompează 15 m^3 de apă la înălțimea de 15 m. timp de o secundă. Cât de mare trebuie să fie puterea motorului dacă randamentul instalației este de 90%?

* * *

Soluție. Avem $W_{(util)} = \eta Pt$, sau $P = \frac{W}{\eta t}$.

Deci $$P = \frac{15 \times 15.000}{0{,}9 \times 75} C.P.$$

De unde $$P = 3333{,}33\ C.P.$$

Problema 824

Intr'un trunchi de con circular drept este înscrisă o sferă. Volumul acestei sfere este egal cu jumătate din volumul trunchiului de con. Să se găsească unghiul format de generatoare și baza conului.

S. Petrov

Soluție.

Fie α unghiul căutat. Vom avea:

$$h = G \sin\alpha \qquad (1)$$

$$R - r = h \operatorname{ctg}\alpha \qquad (2)$$

$$R + r = G \qquad (3)$$

Ultima relație este dedusă din condiția de inscriptibilitate

$$\frac{\pi}{6} h(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{4 \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^3}{3}. \qquad (4)$$

Din (2) și (3) avem

$$R^2 + r^2 = \frac{h^2 \operatorname{ctg}^2\alpha + G^2}{2}; \quad Rr = \frac{G^2 - h^2 \operatorname{ctg}^2\alpha}{4}.$$

Inlocuind în (4) și ținând seamă și de (1) obținem:

$$\frac{G^2 \cos^2\alpha + 3G^2}{4} = G^2 \sin^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha + 3 = 4 \sin^2\alpha$$

$$5 \sin^2\alpha = 4$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \text{sau} \quad \operatorname{tg}\alpha = 2.$$

Rezultă $\alpha = 63° 26' 10''$.

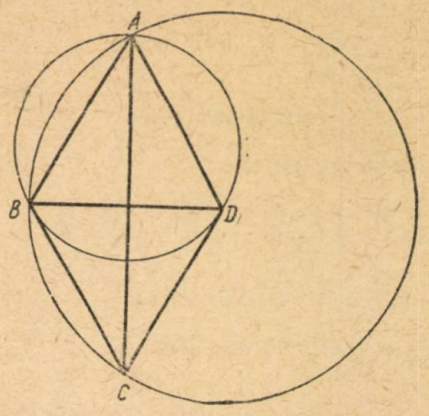
Problema 845

Să se determine suprafața rombului ABCD știind că razele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABD și ACD sunt egale respectiv cu R și r.

V. Isacov
(R.S.S. Cazahă)

Soluție. Fie aria $ABCD = S$,

$$\widehat{BAD} = \alpha, \quad \overline{AC} = D, \quad \overline{DB} = d.$$



Avem :

$$d = 2R \sin\alpha$$

$$D = 2r \sin\alpha$$

Inmulțind și împărțind aceste relații, obținem:

$$dD = 2S = 4Rr \sin^2\alpha$$

$$S = 2Rr \sin^2\alpha$$

$$\frac{d}{D} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{r}$$

$$\sin\alpha = \frac{2Rr}{R^2 + r^2}.$$

Rezultă

$$S = \frac{8Rr}{(R^2 + r^2)^2}.$$

Problema 847

Să se arate că într'un triunghi oarecare avem:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{R}.$$

C. Ionescu-Țiu

Soluție. Considerăm inegalitatea cunoscută

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + xz$$

care se poate scrie

$$(x + y + z)^2 \geqslant 3(xy + yz + xz)$$

sau încă

$$x + y + z \geqslant \sqrt{3} \cdot \sqrt{xy + yz + xz}.$$

Dacă în ultima egalitate facem

$$x = \frac{1}{a}, \quad y = \frac{1}{b}, \quad z = \frac{1}{c}, \quad \text{avem:}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \sqrt{3} \sqrt{\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}} =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2p}{abc}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{2Rr}}.$$

Insă

$$R \geqslant 2r.$$

Rezultă

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{R}.$$

Problema 855

Să se rezolve ecuaţiile:

1) $$\frac{1+ax}{1-ax}\sqrt{\frac{1-bx}{1+bx}}+1=0$$

2) $$x+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x+2}$$

apoi să se verifice soluţiile aflate.

* * *

Soluţie. 1. Izolând radicalul şi ridicând ambii membrii la patrat, obţinem:

$$a^2bx^3+(b-2a)x=0, \text{ de unde}$$

$$x_1=0 \quad \text{şi} \quad x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{2a-b}{a^2b}}.$$

Rădăcina $x_1=0$ verifică ecuaţia

$$\frac{1+ax}{1-ax}\sqrt{\frac{1-bx}{1+bx}}-1=0 \qquad (1')$$

Rădăcinile $x_{2,3}$ verifică ecuaţia 1) dacă $|a|>|b|$ iar dacă $|a|<|b|$ ele veriică ecuaţia (1') (Verificarea se face cu valori numerice).

2) Considerăm expresiile

$$A \equiv 2\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}-x$$

$$B \equiv 2\sqrt{x+2}-\sqrt{3-x}+x$$

$$C \equiv 2\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}-x$$

$$D \equiv 2\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}+x$$

Dacă o valoare a lui x anulează A, anulează şi produsul $ABCD$. Ea este rădăcină a ecuaţiei 2).

$$AB \equiv -x^2+3x+11-4\sqrt{(x+2)(3-x)}$$

$$CD \equiv -x^2+3x+11+4\sqrt{(x+2)(3-x)}$$

$$ABCD \equiv x^4-6x^3+3x^2+50x+25.$$

Ecuaţia $ABCD=0$ are 2 rădăcini reale:

$$-1<x_1<0; \quad -2<x_2<-1.$$

Cum pentru $-2<x<0$ trinomul $-x^2+3x+11$ este pozitiv, aceste rădăcini anulează produsul AB. Mai observăm că $2\sqrt{x+2} \gtrless \sqrt{3-x}$ după cum $x \gtrless -1$. Rezultă că rădăcina x_1 verifică ecuaţia $B=0$, iar rădăcina x_2 ecuaţia $A=0$.

PROBLEME PROPUSE

1140. Intr'un dreptunghi dat, de laturi a şi b se duce o diagonală şi în fiecare jumătate de dreptunghi se înscrie câte un cerc. Se cere distanţa centrelor cercurilor şi distanţele dela unul din centre la vârfurile dreptunghiului exprimate în funcţie de a şi b.

I. Armean

1141. Intr'un etaj de amplificare lucrează lampa de radio sovietică 6J7 cu parametri: factorul de amplificare $\mu=1500$ şi panta $s=0{,}0012$. Ştiind că rezistenţa anodică de sarcină $R_a=180000$ ohmi, se cere coeficientul de amplificare al etajului.

Şerban Ion
elev, Piteşti

1142. Să se construiască două cercuri secante de raze date R şi r, în poziţia de a avea tangenta comună egală cu coarda comună.

Gh. Bazacov

1143. Să se rezolve ecuaţia:

$$\sin 2x\,(1-2\sin^2 x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right).$$

Crestici Borislav

1144. Pe un sul cu diametrul de 15 cm este înfăşurat postav care trebue trecut pe un alt sul de acelaş diametru. La începerea înfăşurării pe sulul gol, sulul plin are un diametru de 115 cm. Ştiind că postavul în lungime de 240 metri s'a desfăşurat cu viteza constantă de 50 cm/s şi s'a înfăşurat pe al doilea sul obţinându-se acelaş diametru de 115 cm, să se afle expresiile vitezelor unghiulare ale celor două suluri în funcţie de timp şi apoi, în funcţie de lungimea metrajului desfăşurat.

C. Ionescu-Ţiu

1145. Să se simplifice expresia:

$$E=\frac{\sqrt[3]{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}-\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}-3}}{\sqrt[3]{4}-1}$$

Florin Torjescu
elev, Ploeşti

1146. Să se construiască un triunghi ABC ştiind că bisectoarea unghiului A trce prin centrul cercului lui Euler, cunoscând R raza cercului cir-

cumscris şi raportul $\frac{BH}{AB} = K$, unde H este ortocentrul triunghiului.

Irinel Codreanu
elev, Buzău

1147. Să se demonstreze identitatea:

$$C_m^m C_n^p + C_{m+1}^m C_{n-1}^p + \ldots + C_{m+n-p}^m C_p^p = C_{n+m+1}^{p+m+1}.$$

Onofraş Eugen
student, Iaşi

1148. Cercul construit pe înălţimea AD a unui triunghiu oarecare ABC ca diametru, taie laturile AB, AC respectiv, în E şi F. Dreptele BF şi CE taie a doua oară cercul în M şi N. Să se arate că:

1° Dreptele BC şi EF sunt antiparalele.

2° Triunghiul AMN este isoscel.

Constantinescu Florin,
elev, Cluj

1149. Câte găuri are o sirenă care face 530 rotaţii în 25 secunde, iar sunetul produs de sirenă are 636 vibraţii pe secundă?

Zigulescu D. Marin
elev, R.-Vâlcea

1150. Să se calculeze suma:

$$S = 1 \cdot C_1^1 + 2\left(C_2^1 + C_2^2\right) + 3\left(C_3^1 + C_3^2 + C_3^3\right) + \ldots$$
$$\ldots + n\left(C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n\right).$$

Gh. I. Bercea

1151. Să se calculeze perimetrul şi aria unui poligon regulat cu n laturi în funcţie de n şi raza cercului circumscris poligonului. Făcând pe n să crească foarte mult, să se regăsească lungimea cercului şi aria lui.

Simon St. Petre

1152. Să se rezolve ecuaţia

$$\frac{x^{x(4x^2-3)}}{x} = 1.$$

Braşovan Ioan
elev, Timişoara

1153. Sburând cu viteza $v = 360$ km/oră, un avion cu greutatea $P = 3000$ kg execută un viraj cu raza $R = 2500$ m.

Să se stabilească unghiul de înclinare şi forţa ascensională necesare menţinerii virajului în plan orizontal. Forţa ascensională este totdeauna perpendiculară pe planul aripei.

Malcoci Vladimir
elev, Bucureşti

1154. Să se afle o progresie geometrică ştiind că suma primilor patru termeni este S, iar suma patratelor aceloraş termeni este S_2.

Aplicaţie:

$$S = 15 \quad , \quad S_2 = 85.$$

Tiţa I. Nicolae
student, Bucureşti

1155. Dacă a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3, sunt numere reale şi nu toate nule şi există egalităţile:

$$a_1 = b_2c_3 - c_2b_3; \quad b_1 = c_2a_3 - a_2c_3; \quad c_1 = a_2b_3 - b_2a_3;$$
$$a_2 = b_3c_1 - c_3b_1; \quad b_2 = c_3a_1 - a_3c_1; \quad c_2 = a_3b_1 - b_3a_1;$$
$$a_3 = b_1c_2 - c_1b_2; \quad b_3 = c_1a_2 - a_1c_2; \quad c_3 = a_1b_2 - b_1a_2;$$

să se deducă şi egalităţile:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1;$$
$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$$
$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = a_2a_3 + b_2b_3 + c_2c_3 = a_1a_3 + b_1b_3 + c_1c_3 = 0$$
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0.$$

C. Ionescu-Ţiu

1156. *a)* Dece o flacără nu trece prin sita metalică?

b) Cum se poate transporta toată sarcina unui conductor pe alt conductor?

c) Cum ar varia acceleraţia gravităţii pe suprafaţa pământului dacă diametrul lui ar fi dublat, fără a se schimba densitatea? Cum s'ar schimba acceleraţia dacă diametrul ar fi dublat însă masa pământului ar rămâne neschimbată?

* * *

1157. Să se afle bazele x, y, z ale sistemelor de numeraţie în care există relaţia

$$1111_x + 3333_y = 1324_z$$

ştiind că $x = y - 2 = z - 4$.

Kiss Elemer
Tg. Mureş

1158. Fie S_1, S_2, S_3, S_4 ariile feţelor unui tetraedru. Să se arate că aria unei feţe se poate calcula după formula:

$$S_1^2 = S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 -$$
$$- 2\left[S_2 \cdot S_3 \cos\left(\widehat{S_2, S_3}\right) + S_3S_4 \cdot \cos\left(\widehat{S_3, S_4}\right) + \right.$$
$$\left. + S_2 \cdot S_4 \cdot \cos\left(\widehat{S_2, S_4}\right)\right].$$

Prin $\left(\widehat{S_2, S_3}\right)$ se înţelege unghiul diedru format de feţele tetraedrului cu ariile respectiv S_2 şi S_3.

Mihail I. Popescu
student, Bucureşti

1159. Să se transforme în fracţii ordinare următoarele fracţii periodice:

$$A = 0{,}141616\ldots = 0{,}14\,(16)$$
$$B = 0{,}31818\ \ldots = 0{,}3\,(18)$$
$$C = 0{,}459797\ldots = 0{,}45\,(97)$$

apoi să se arate că $A + B = C$.

* * *

1160. Să se arate că în vârful A al unui stâlp AB ridicat în prelungirea razei pământului, de înălţime:

$$AB = \sqrt[3]{\frac{g_0 R^2}{\omega^2 \cos^2 \lambda}} - R$$

acceleraţia gravităţii (datorită atracţiei pământului şi forţei centrifuge) are direcţia *perpendiculară* pe stâlp; prin urmare un fir cu plumb atârnat în A este *orizontal* în loc de a fi *vertical*.

Mărimea acceleraţiei gravitaţiei în B este:

$$g = \sin \lambda \sqrt[3]{g_0 R^2 \omega^4 \cos \lambda}.$$

In aceste formule:

g_0 = acceleraţia gravitaţiei la suprafaţa pământului datorită numai atracţiei pământului; R = raza pământului; ω = viteza unghiulară de rotaţie a pământului; λ = latitudinea stâlpului AB.

Aplicaţiile pentru $\lambda = 45°$. Se va lua: $g_0 = 10 \text{m/s}^2$; $R = 6400$ km; $\omega = 0{,}000073$ rad/s.

Alexandru Stoenescu

1161. Să se demonstreze că într'un triunghi dacă $2b = a + c$ avem relaţia $\frac{2}{r_b} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_c}$; iar dacă $2h_b = h_a + h_c$ avem relaţia

$$r_a r_b r_c (r_a + r_c - 2r_b) =$$
$$= (r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)\,(2r_a r_c - r_a r_b - r_b r_c)$$

de asemenea dacă $2r_b = r_a + r_c$, avem relaţia

$$\sin^2 \frac{A-C}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sin \frac{B-A}{2} \sin \frac{C}{2} +$$
$$+ \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{A}{2}$$

notaţiile fiind cele cunoscute.

Marcel Cotariu

1162. Câte molecule se află într'un cm^3 de azot aflat la presiunea de 10^{-6} torr şi temperatura de 27°C? (1 torr = 1333 dyne/cm^2).

N. Stănescu

1163. Pe o roată de tren se aplică un bandaj de oţel, lucrându-se la temperatura de 350°C. Care va fi presiunea pe care o exercită bandajul la 20°C. Se dă coeficientul de dilatare liniară $\lambda = 0{,}000012$ şi modulul Joung $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm^2.

N. Stănescu

EXERCIŢII PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

E: 401. Un om pe jos, un călăreţ şi un automobil efectuează timp de o oră în total 78 km. Dintr'un punct A unde se găsesc toţi trei pleacă întâi omul şi la 1/4 ore pleacă călăreţul, la 2 ore după călăreţ pleacă automobilul care după 1/4 oră ajunge omul iar după 1/2 oră ajunge călăreţul. Câţi km. parcurge fiecare într'o oră?

Alexandru Pantea
student, Petroşani

E: 402. Intr'un cerc se duce o coardă AC egală cu latura patratului înscris; iar de o parte şi de alta a coardei se duc coarde de lungimea razei. Să se calculeze mărimea unghiurilor formate.

Popescu G. Sergiu
elev, Slatina

E: 403. Dacă

$$A = \frac{1}{1+x}; \quad B = \frac{x+y}{1+y}; \quad C = \frac{1}{1-x},$$

atunci

$$\frac{A+B}{AB}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) - \frac{B+C}{BC}\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)$$

nu depind de y.

Willy Paraschiv
student, Bucureşti

E: 404. Se dă patrulaterului $ABCD$, în care $BC = AD$. Bisectoarele unghiului A şi B intersectează diagonalele BD şi AC respectiv în M şi N. Să se arate că:

$$MB \cdot NC = NA \cdot MD.$$

Popescu I. Mihail
student Bucureşti

E: 405. *a)* Dece un om care alunecă din mers cade pe spinare, iar unul care se împiedecă în mers cade cu faţa înainte?

b) Din ce este mai bine să se execute coşurile de fabrică, din fier sau din cărămidă?

c) Dece ceaiul fierbinte băut dintr'o cană de aluminiu frige buzele şi acealş ceai băut dintr'o cană de porţelan nu le frige?

d) Dece în apă fierbinte zahărul se topeşte mai repede şi mai mult decât în apă rece?

* * *

E: 406. Să se arate că:

$$\frac{a^2-bc}{a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{c^2+ab}=$$

$$=\frac{ab-c^2}{ab+c^2}\cdot\frac{bc-a^2}{bc+a^2}\cdot\frac{ca-b^2}{ca+b^2}.$$

* * *

E: 407. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$x=yz;\quad y=xz \text{ şi } z=xy.$$

Soluţiile care verifică să fie apoi trecute sub formă de tablou.

* * *

E: 408. Să se scrie în sistemul roman numerele: 1954 şi 9.991.909.

* * *

E: 409. Să se calculeze expresia:

$$E=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{x}}}, \text{ unde}$$

$$x=\cfrac{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}{2}$$

C. I. Ţ.

E: 410. O sferă de platină introdusă în apă are greutatea aparentă de 27 grame. Introdusă în mercur, greutatea aparentă a sferei este de 10 grame. Ştiind că densitatea mercurului este 13,6, să se calculeze densitatea platinei.

* * *

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

(urmare)

Soluţii bune primite în luna Octombrie 1953

PIATRA NEAMŢ. Clasa VI-a Roznov, Gervescu M. Ioan 971, 974, 988, 999, 1003, E: 316, 330, 332, 355), Clasa IX-a, Gavril Gheorghe (775, 798, 810, 834, 872, E: 268, 281, 284, 286, 288), Clasa X-a, Minuţ M. Petru (701, 702, 704, 705, 706, 708, 721, 774, 776, 777, 779, 785, 787, 793, 794, 795, 800, 804, P) Vasilescu Florica (779, 887, 904, 907, 913, 938, 972, 992), Clasa XI-a, Minuţ Angela, (710, 724, 757, 770, 822, 824, 831, 853, 864, 864, 867, 869, 870, 875, 904, 909, 91 923), Vasilescu Stelian (904, 917, 923, 927, 938, 974), Clasa IX-a Ciobanu C. N. (765, 767, 780, 788, 813, 819, 823, 835, E: 257, 261, 272, 277, 281, 285, 286, 288, 289, 306), Tifui Zenobia (E: 292, 294, 305, 306, 327, 329, 335).

PITEŞTI. *Liceul de băieţi.* clasa X-a. Ionescu V. Savin 840, 849, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 885, 904, 905, 906, 907, 908, 90 910, 911, 913, 915, 919, 923, 930, 938, 940, 946, 950, 951, 959), Clasa XI-a, Iosifescu Marius (854-883, 885, 887-892, 894-900, P) (45 probleme), *Şcoala Medie Tehnică de Mecanică*, anul II, Gheorghe I. Constantin (853, E: 240, 245, 285, 304), Anul III E, Stoica C. Marin (718, 737, 766, 819, 822, 823, 835, 871, 873, 888, 917, 937, 938, 939, E: 235, 258, 276, 277, 279, 285, 289, 294, 295, 296, 298, 304, 305, 306, 318, P).

PLOEŞTI. Şcoala Medie Tehnică de Petrol, Anul III, Grigore N. Ion (787, 871, 878, 904, E: 266, 305, 306, 309, 314), Liceul « I. L. Caragiale », Clasa IX-a, Şerban G. Adrian (795, 800, 823, 841, 863, 866, 871, 872, 873, 876, 878, 888, 889, 890, 904, 905, 906, 911, 913, 915, 919, 926, 927, 930, 937, 938, 940, 963, 968, E: 268, 281, 293, 294, 301, 314, P) Teodorescu Ştefan (787, 831, 838, 839, 841, 850, 852, 871, 872, 873, 874, 876, 878, 880, 882, 895), Clasa X-a, Dogaru Iulian, (765, 768, 769, 770, 771, 772, 776, 779, 780, 783, 787, 791, 792, 794, 799, 804, 806, 816, 822, 823, 827, 831, 834, 838, 839, 841, 848, 863, 870, 871, 872, 873, 876, 887, 904, 906, 908, 910, 911, 913, 914, 915, 916, 917, 923, 927, 937, 938, 939, 940), Horoiu Dan (770, 787, 788, 794, 795, 842, 875, P), Jarcău I. Aurel (948, 952, 954, 955, 956, 1023, E: 322, 329, P) Jipa Gh. Vasile (888, 910, 911, 912, 950, 971, 972, 1000, 1001, 25), Panaitescu Alexandru (706, 708, 709, 710, 712, 713, 714, 716, 721, 724, 725, 726, 727, 728, 731, 736, 742, 748, 765, 768, 769, 770, 780, 783, 787), Pavelescu I. Petre (838, 865, 876, 907, 937, 950, 971, 974, 999), Rădulescu Gh. Constantin (712, 721, 723, 724, 725, 726, 737, 739, 742, 744, 748, 753, 765, 770, 864, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 896, 904, 905, 906, 912, 923, 925, 937), 938, 939, 964, 971, 972, 973. 974, 975, 976, 987, 988, 1025, Vasiliu Sorin (E; 304, 308, 322, 325, 328, 329), Clasa XI-a, Brozici Mircea (743, 768, 863, 871, 872, 876, 905), Silion Dinu (713, 787, 823, 824, 835, 839, 876, 878, 904, 906, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 923, 927, 929, 931, 934, 937, 938, 940, 941, 942, 971, 972, 973, 974, 975), Torjescu Florin (785, 794, 795, 796, 813, 817, 825, 840, 860, 883, 904—919, 921, 923, 925, 926—942 ,P).

PREDEAL. Şcoala medie « Dimitrie Cantemir ». clasa XI-a, Duţu Gheorghe (740, 741, 742, 746, 751, 754, 765, 768, 770, 783, 785, 786, 787, 790, 793, 806, 807, 820, 821, 825, 827, 835, 837, 842, 864, 865, 866, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 904, 906, 908, 912. E: 223, 224, 241, 252, 253, 254, 255, 258, 260, 261, 263, 305, 306), Uţă Marin (741, 742, 746, 786, 785, 786, 787, 790, 793, 807, 808, 810, 812,

815, 820, 821, 823, 825, 827, 834, 835, 842, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913).

RĂDĂUŢI. Clasa XI-a, Lazăr Dumitru (756, 839, 840, 845, 850, 852, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 878, 882, 900, 904, 905, 906, 907, 909, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 918, 923, 925, 927, 928, 929, 931, 932, 937, 938, 941, 942, 944, 946, 952, 954, 959, 966, 968, 974, 975, P).

RÂMNICUL SĂRAT. Clasa IX-a, Teodorescu Cristian (711, 722, 723, 724, 726, 737, 743, 744, 745, 748, 753, 765, 767, 768, 769, 770, 774, 777, 779, 787, 788, 791, 794, 795, 800, 806, 808, 83, 841, 842, 863, 864, 871, 872, 873, 876, E: 257, 259, 260, 261, 262, 268, 270, 274, 277, 279, 281, 292, P) Clasa X-a, Stamatiu I. Alexandru (800, 806, 808, 838, 863, 864, 876, 908, 919, 931, 944, 950, 954, 956, P)

RÂMNICUL VALCEA. Clasa XI-a, Zigulescu D. Marin (741, 783, 838, 839, 842, 845, 857, 863, 867, 868, 871, 872, 875, 876, 878, 882, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 911, 913, 915, 916, 919, 923, 946, 950, 959, P).

ROMAN. Clasa IX-a, Brumă G. Ilie (971, 972, 999, E: 305, 306, 315, 317, 320, 322, 323, 324, 326, 328, 329, 331, 335), Gavriluţ P. Mihai (768, 770, 774, 814, E: 281, 285, 286, 289, 294, 300), Stoica C. Constantin (871, 904, 971, E: 306, 318, 330, 335), Clasa XI-a, Cojocaru Vasile (769, 770, 773, 774, 777, 778, 780), Mitrofan Gheorghe (904, 912, 913, 923, E: 303, 304, 306, 313).

ROŞIORII DE VEDE. Liceul Mixt, clasa X-a, Miclăuş Vasile (878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 887, 888, 889, 890, 892, 983, 894, 895, 897, 899, 900, 904, 904—923, 925—942).

SIBIU. Clasa X-a, Zorilescu M. Dan (842, 946, 950, 952, 955, 959, 973, 979, 1005, 1009).

SLANIC BAI (Tg. OCNA). Clasa VII-a, Căruntu S. Maria (912, 925, 941, 947, E: 259, 261, 262, 263, 265, 290, 292, 294, 299, 317).

SLATINA. Clasa VIII-a, Ursu Gh. Mihai (787, E: 242, 266, 269, 270, 292, P), Clasa IX-a, Jaică I. Florea (871, 872, 873, E: 259, 260, 261, 266, 270, 294), Clasa X-a, Popescu G. Sergiu (710, 723, 733, 737, 768, 769, 794, 800, 804, 805, 820, 838, 848, 864, 877, 878, 882, 90, 904, 905, 907, 912, 913, 917, 923, 928, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 957, 958, 971, 972, 973, 974, 975, 976, P).

SUCEAVA. Clasa IX-a, Rotaru Constantin (873, 904, 937, 938, 973), Clasa X-a, Budai Teodor (794, 841, 871, 872, 873, 904, 929, 972, 973, E: 270, 292, 294, 305, 306, 309, 311, 312, 355.).

TARGOVIŞTE. Clasa IX-. Galaţky Gheorghe (728, 757, 766, 775, 792, 806, 807, 821, 826, 838, 839, 842, 845, 847, 866, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 880, 881, 882, 884, 885, 88, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 912, 913, 915, 916, 917, 923, 926, 927, 928, 930, 931, 937, 938, 940, 941, 942), Stoian I. Gheorghe (733, 751, 756, 802, 822, 842, 878, 881, 882, 891, 897, 900, 901, 906, 908, 927, 928, 930, 934, 959, 972, 974, 975, 976, 978, 988, 996, 999, 1005-25, P). Clasa X-a, Sipoteanu Ioan (904, 923, E: 243, 305, 306), Clasa XI-a, Brezeanu Ioanin (765, 838, 847,853, 855, 870, 872, 873, 875, 876, 878, 880, 883, 885, 887, 888, 890, 891, 892, 893, 896, 897, 900, 901, 904, 906, 908, 912, 923, 925, 927, 936, 938, 939, 940, 942, 943, 945, 948, 950, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 964, 968, 971, 972, 1019, 1024, 1025, P) Nica G. Ioan (716, 770, 904, 915, 927, 929, 938, 940, 950), Şcoala Medie Tehnică de Petrol, anul II, Bobeică I. Dumitru (743, 744, 770, 791, 794, 814, 823, 864, 871, 872, 874, 875, 876, 878, 904, 905, 912, 913, 915, 916, 917, 923, 928, 937, 938, 939, 940, 941, 942, E: 254, 304 305, 307).

TARGUL-JIU. Clasa X-a, Cosinschi Dragoş (878, 904, 937, 974, Crăciun V. Contantin (903, 923, 945, 950, 972, 999), Gornoviceanu Coriolan (907, 923, 978, 992, 1003, E: 271), Surlin Grigore (E: 318, 324, 327, 329, 335).

TĂRGUL MUREŞ. Clasa IX-a. Albu Mircea (770, 771, 774, 779, 783, E: 253, 259, 264), Cătărig Alexandru (768, 770, 771, 774, 776, 779, 783, E: 294, 305, 309,), Corcodel Virgil (904, 906, 937, 938, E: 305, 306, 312), Delacov Victor 768, 770, 771, 774, 776), Iaina Adrian (768, 770, 771, 774, 776, 779, 783, E: 258, 261, 263, 264), Maji Ştefan (770, 771, E: 254, 261, 265, 268), Moraru Titus (904, 938, E: 292, 294, 301, 305, 306, 309, 312), Matei Ioan (768, 770,- 771, 774, 779, 783, E: 252, 254, 258, 260, 261, 263, 265), Ştefanelli Dorin (768, 770, 771, 779, 783, E: 252, 261, 264, 279, 294, 305, 306, 309, 329, 332), Suciu Octavian (768, 774, E: 252, 254, 260), Clasa X-a. Goşa Petru P. (770, 771, 774, 783, E: 261, 264), Antonescu Victor (777, 850, 871, 873, 878, 904, 906, 907, 938, E: 304, 305, 306, 307, 309, 311, 314), Lazslo Ioan (770, 771, 779, 782, E: 258, 261, 262, 264), Clasa XI-a Bunica M. Octavian (776, 783, 788, E: 254, 256, 265, 269, 270, 292, 294), Matei Nicolae (703, 705, 706, 710, 724, 753, 765, 780, 782, 783, 798, 801, 804, 806, 819, 823, 834, 835, 838, 839, 871, 872, 873, 875, 874, 904, 905, 908, E: 242, 243, 244, 246, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 268, 269, 270, 271, 272, 274, 275, 276, 277, 279, 280. 281, 285, 286, 287, 289, 290, 291, 292, 293, P) Paşcanu Eugen (775, 777, 778, 819, 835, E: 264, 265) Weszeli Tiberiu (740, 754, 766, 818, 819, 821, 822, 826, 831, 832, 834, 835, 838, 839, 841, 842, 845, 848, 850, 851, 852, 853, 855, 859, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876).

TECUCI. Clasa X-a, Morozan Teodor (768, 779, 846, 948, 952, 959, 962, 971, 972, 973, 974, 985, 992, 994, 998, 999, 1000, 1001, 1020, Corban Adrian (871, 980, 092, 1000 1019, E: 292, 294, 300, 329, 335, 336), Clasa XI-a. Flueraru Costică (775, 822, 837, 839, 875, 904, 905, 916, 917, 923, 942, E: 290, 291, 292, 293, 294, 300), Mitu Alexandru (831, 837, 841, 863, 871, 872, 873, 875, 876, 923, 938, 942, 871, 974, 976), Turcanu D. Ioan (904, 905, 917, 923, 942, E: 326, 327, 328, 329, 331, 332, 335).

TIMIŞOARA. Şcoala Pedagogică, anul III, Mattler Martin (912, 915, 940, 973, 974). *Şcoala Medie de Energie Electrică*, anul II, Flinker Gh. (944, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 986, 988, 989, 999, 1004, 1007), *Facultatea Muncitorească*, Goleanu Ştefan (904, 915, E: 290, 298, 305, 306, 309, 311). *Liceul 1 băieţi*. Clasa VII-a. Mihăileanu N. Constantin (E: 278, 279, 280, 356, 361). *Liceul 2 băieţi*, clasa VIII-a, Arsenovici I. Tiberiu (E: 251, 255, 257, 259, 261, 266, 268, 269, 274, 275, 277, 292), Goldstein Eduard (787, 800, 823, 878, 904, E: 306), Clasa X-a, Braşovan Ioan (739, 754, 769, 787, 789, 827, 881, 882, 913, 916, 917, 919, 923, 927, 929, 930, 931, 932, 937, 941, 943, 944, 950, 956, 958, 966, 971, 972, 973, 974, 975, 986, 988, 993, 994, 999, 1007, 1009, 1019, P) *Liceul de fete*, clasa VIII-a, Cismariu Ionica (282, 285, 301, 306, 308, 311, 312, 312, 313, 316, 317, 318, 320, 322, 323, 331, 335).

TULCEA. Clasa IX-a, Slavov Leonid (768, 770, 787, 858, 880. 905, 910, 912, 915, 977, E: 252, 254, 255, 261, 266, 279, 292, 294, 300, 314).

TURNU MAGURELE. Liceul mixt, clasa IX-a, Coticeru Maria (257, 281, 286, 292, 324, 335), Mitrică C. Ion (770, E: 239, 261, 262, 263), Clasa X-a, Zătreanu P. Corneliu (822, 872, 904, 938, 950, 999, E: 257, 261, 292, 336).

TURNU SEVERIN. Clasa X-a. Mihăilescu I. Emanoil (972, 974, 994, 999, 1004), Schefler A. Simion (744, 768,

787, 834, 871, 904, 906, 913, 916, 938, E: 240, 245, 305, P), Clasa XI-a, Filimon St. Ştefan (703, 704, 705, 706, 707, 709, 710, 711, 712, 944, 959, 950, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 984, 986, 987, 988, 989, 996, 999, 1000, 1002, 1003, 1004, 1007, 1008).

VASLUI. Clasa VIII-a, Belu I. Tudor (E: 266, 271, 279, 280, 292, 294), clasa IX-a, Dumitrescu V. Mihai (873, 913, 937, E: 290, 292, 300, 305, 306, 309, 314, 329, 336), Popa St. Petru (871, 873, 875, 878, 938, E: 290, 292, 295, 298, 300, 325, 335), Stănescu Viorel (E: 260, 266, 306, 324, 335), clsa X-a, Bostan Gh. Emil (743, 745, 813, 824, 834, 835, 847, 848, 954, 988, 999, 1002, 1025, E: 279, 285, 289, 290, 295, 303, 308, 309, 311, 325, 327, 329, 335, P).

ZALĂU. (Cluj) Clasa X-a, Hodiş Gheorghe (824, 889, 950, 952, 959, 962, E: 301, 324, P).

EVIDENŢIAŢI

Dintre rezolvitorii de probleme dela care s'au primit soluţii între 15 *Octombrie* 1953 *şi* 15 *Noembrie* 1953 *se evidenţiază*: *Bocu Mircea* (clasa X-a, Oradea), *Dănilă Gheorghe* (absolvent, Giurgiu), *Popescu I. Mihail* (student, Bucureşti), *Uţă Marin* (clasa XI-a, Predeal), *Andreescu Gh. Mircea* (student, Bucureşti), *Andreescu Gh. Radu* (clasa X-a, Lic. 10 băeţi, Bucureşti), *Pupăzan V. Nicolae* (clasa XI-a, Predeal), *Dragomir Constantin* (clasa XI-a, Piteşti), *Vlădescu Gheorghe* (clasa XI-a, Liceul « Aurel Vlaicu » Bucureşti), *Lezeu F. Aurel* (Beiuş), *Buzuloiu Vasile* (clasa XI-a, Oradea), *Petrovici Radu* (clasa XI-a, Focşani), *Mitu St. Velicu* (clasa XI-a, Giurgiu), *Dabija Sorin* (clasa XI-a, Galaţi) *Faraga Gruia* (clasa X-a, Oraşul Stalin), *Ionescu I. Ion* (clasa XI-a, Târgovişte), *Filimon Ştefan* (clasa XI-a, Turnu-Severin).

* * *

Dela 15 *Octombrie la* 15 *Noembrie* 1953 *s'au mai primit cel puţin cinci soluţii bune la probleme propuse în ultimele cinci numere ale Revistei Matematice şi Fizice dela rezolvitorii ale căror probleme rezolvate sunt trecute după numele fiecărui rezolvitor, precum şi probleme propuse (P), articole (A), note (N), după cum urmează*:

AIUD. Clasa IX-a. Vrăjitoru Dan (837, 863, 864, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 880, 890, 904, 905, 907, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 925, 926, 928, 929, 930, 945, P), Clasa XI-a. Crăciun Valeriu (766, 768, 780, 783, 787, 792, 795, 817, 819, 823, 827, 834), Ispas Lucia (1033, 1038, 1040, 1042, 1043, E: 329, 335).

ALBA IULIA. Iordache F. Gheorghe (824, 845, 861, 887, 908, 954, E: 292, 294).

ARAD. Clasa XI-a. Vlaga Marius (786, 787, 788, 794, 795, 812, 814, 816, 818, 823, 824, 834, E: 266, 267, 268 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 279, 280, 281, 282), anul IV. Vlagiu Ion (884, 885, 942, E: 282, 286, 287, 304, 309, 324, 246).

BACĂU. Clasa IX-a. Boboc I. Mihai (863, 872, 889, 904, 906, 918, 938, 952, 959, 992, 1000, 1025, 1038, 1043), Iorga Sergiu (747, 823, 838, 874, 875, 876, 904, 906, 912, 915, 919, 925, 937, 938, 971, 974, E: 290, 295, 298, 300, 306, 309, 311, 314, 315, 317, 318, 322), Merticaru Vasile (904, 910, 915, 971, 972, 975, 1025), Palaghiţă I. Ştefan (904, 929, 938, 992, 1025, 1038), Simion Emil (904, 910, 972, 974, 992, 1000, 1025).

BAIA MARE. Clasa IX-a B. Roman Vasile (834, 992, 999, E: 286, 329, 336), Clasa X-a. Pop Gheorghe (888, 952, 955, 962, 966, 984, 986, 989, 992, 993, 994, 996, 999, 1003, 1005, 1009, 1016, 1018, 1022, 1024, 1025).

BEIUŞ. Lezeu F. Aurel (788, 792, 793, 808, 813, 823, 824, 825, 834, 835, 838, 839, 844 845, 850, 852, 862, 867, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 944, 950, 962, 966, 968, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 988, 992, 993, 999, 1000, 1001, 1002, 1004, 1005, 1007, 1011, P), Clasa XI-a, Ordentlich Ştefan (787, 792, 798, 806, 822, 831, 888, 950).

BÂRLAD. Clasa X-a. Bichir Constantin (889, 906, 908, 923, 1014, 1033, 1038, 1040, 1043, E: 327, 329, 330, 332, 335, 337, 339, 341, 342, 347, 349, 350).

BOTOŞANI. Clasa X-a. Rabinovici Rutica (E: 301, 306, 309, 322, 328, 329), Clasa VII-a. Buccea Ionescu Cristina (E: 290, 300, 301, 306, 309).

BRĂILA. Clasa VIII-a. Dogaru Gabriela (E: 281, 286, 289, 292, 335).

BUCUREŞTI. *Liceul* 1 *Fete*. Clasa V-a A Sălăgeanu Simona (E: 245, 246, 259, 335, 337,351), Clasa X-a. Neguţ Alexandrina (999, 1000, 1005, 1025, 1038, 1066, 1068, 1069, 1078, 1079, 1081, 1084), Filimon Rodica (854, 923, 930, 931, 938, 960, 993, 994, 1000, 1038). Liceul 1 Băieţi. Clasa X-a. Alexandru Nicolae (775, 796, 797, 799, 810, 816, 820, 825, 827, 829, 839, 841, 842, 848, 850), Dumitru Dan (905, 908, 938, 951, 964, 1000, 1014, 1040, 1042, E: 327, 336, 349, 351, 350), clasa VII-a. Popescu Călin (E: 325, 326, 328, 330, 331), *Liceul* 2—10—13 *fete*, Clasa X-a. Wechsler Henriette (834, 872, 913, E: 294, 279, 296), Liceul 2 băieţi, Clasa VIII-a C. Duduica Radu (833, 848 853, 864, 871, 873, 905, 907, 913, 940, 1020, E: 274, 292, 300, 304, 306, 309, 312, 323, 324, 335, 339, 340, 349), Clasa X-a. Solomon Sergiu (834, 880, 888, 900, 906, 950, 1019, 1025, 1033, 1037, 1040, 1042, E: 305, 306, 309, 312, 324, 335). *Liceul* 5 *băieţi*, Clasa X-a. Anghel G. Mircea (871, 872, 873, E: 266, 268, 269, 280, 286, 294), *Liceul* 6 *băieţi*, Clasa VI-a. Nicolescu A. Miron (E: 325, 337, 339, 346, 354, 359, 367, 368), Clasa IX-a. Popovici Radu (925, 1025, E: 337, 341, 346, 349, 350, 351), Clasa X-a. Kestenband Barbu (739, 841, 866, 871, 872, 873, 875, 993, 1000, E: 314). *Liceul* 9 *băieţi*, Clasa IX-a. Ellenberg Manfred (E: 274, 306, 308, 309, 335). *Liceul* 10 *băieţi « Aurel Vlaicu »*, Clasa IX-a C. Dumitrescu Ovidiu (905, 913, E: 304, 308, 323, 329, 335), Mara I. Alexandru (872, 880, 950, 971, E: 300), Giorgian Dan (E: 305, 306, 312, 316, 323, 324), Sandu Gh. Ioan (799, 822, 835, 837, 838, 839, 850), Stănăşilă Octavian (776, 799, 822, 883, 837, 839, 850, E: 300), Vidlescu C. Vasile (1025, E: 266, 327, 335, 344), Dinescu C. Radu (837, E: 305, 306, 324, 325, 335, 337), Clasa X-a. Popovici Dan (812, 822, 827, 831, 838, 842, 854, 855), Andreescu Gh. Radu (812, 818, 820, 836, 840, 843, 844, 846, 849, 851, 852, 856, 857, 859, 860, 869, 877, 879, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 891, 896, 897, 901, 914, 818, 924, 935, 936, 939, 941, 943, 947, 948, 956, 957, 968, 983, 984, 996, 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1006, 1007, 1008, 1009, 1011, 1012, 1014, 1015, 1018, 1019, 1025, 1026, 1027, 1029, 1030, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1040, 1042, 1043, 1045, P), Clasa XI-a. Alexe M. Cornel (787, 794, 795, 838, 946, 950, 952, 966), Dumitriu D. Ion (871, 971, E: 293, 294, 349), Dumitru Eugen (837, 839, 850, 875, E: 294), Gentimir Aurel (881, 838, 872, 873, 876, 878, 917, 950, 976, 986, 999, 1009, 1025), Ionescu Constantin (839, 850, 875, E: 292, 294), Ocneanu Eugen (837, 850, 871, 910, 827, 931, 938, 940, 946, 974, 1025), Popovici Ştefan (871, 873, 878, 906, 908, 915, 917, 923, 950, 954, 968, 973, 999, 1025, 1040, E: 270, 294), Grimani P. Nicolae (787, E: 268, 305, 306, 309, 324, 327, 329, 335), Radu Negru Lucian (837, 838, 839, 842, 871, 872, 873, 874, 875,

906, 908, 910, 912, 916, 972, E: 290, 292, 318, 322), Popi Dan (873, E: 305, 306, 312, 329), Stoica M. Constantin (766, 807, 808, 827, 834, 837, 842, 871, 872, 873, 875, 876, 878, 879, 881, 888, 904, 906, 914, 927, 931, 940, 944, 959, 971, 973, 976, 986, 1007, 1023, 1026, E: 292, 294, 306, 321, 347, 349, 350), Vlădescu Gheorghe (807, 821, 837, 839, 842, 850, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 879, 880, 881, 882, 888, 905, 906, 910, 912, 913, 915, 917, 920, 923, 927, 928, 931, 937, 938, 940, 942, 946, 952, 959, 976, 986, 999, 1004, 1009, 1018, 1023, 1025, 1038, E: 268, 270, 290, 294, 298, 306, 314, 317, 320, 322, 324), Zidăroiu G. Corneliu (797, 808, 834, 837, 839, 842, 871, 878, 881, 882, 887, 888, 904, 906, 911, 916, 931, 938, 940, 950, 952, 959, 976, 1023, 1033, 1035, 1038, 1043). *Liceul 12 fete.* Clasa VIII-a. Clondescu Ioana (871, E: 292, 294, 324, 335, 339, 341).

Studenți: Andreescu Mircea (846, 849, 852, 857, 860, 913, 924, 929, 932, 935, 939, 941, 943, 947, 948, 955, 960, 961, 966, 967, 968, 969, 970, 977, 978, 980, 984, 985, 988, 991, 992, 993, 994, 995, 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1006, 1007, 1008, 1009, 1011, 1012, 1013, 1014, 1016, 1018, 1019, 1020, 1024, 1025, 1026, 1027, 1029, 1030, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1040, 1041, 1042, 1043, P), Popescu I. Mihail (841, 842, 845, 853, 857, 859, 861, 866, 867, 869, 870, 871, 872, 873, 875, 876, 891, 943, 957, 960, 963, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 980, 992, 994, 996, 1000, 1002, 1024, P). *Școala medie de măsurători terestre.* Anul III. Bălu Vasile (871, 872, 873, 875, 878, 950, 972, 974, 999, 1000, 1001, 1040, E: 303, 305, 306, 318, 324, 327, 335, 339, 344, 349, 350), Tănase Dumitru (802, 851, 863, 864, 865, 866, 870, 917, 927, 928, 952, 956, 963, 968, 998, 1033, 1035, 1036, 1037, 1038, 1040, 1042, 1043, E: 267, 272, 287, 303, 311, 339, 340, 341, 343, 344, 346, 349, 350). Școala pedagogică băieți. Anul IV. Scobiliment Jăgărai (728, 839, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 940). Școala medie de construcții Anul II. Cimpoca Ștefan (963, 969, 970, 971, 972, P). Școala Profesională Comercială Nr. 2. Anul III. Dedu Aurel (941, 973, 974, 999, E: 311, 318, 335, 337, P). *Școala tehnică de Mecanică Nr.* 2. Anul III C. Aizer Carola (838, 871, 872, 873, 875, 898, 904, 906, 910, 912, 913, 917, 927, 928, 938, 940, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 978, 988, 999). *Școala Medie tehnică de Metrologie.* Anul III. Fântâneanu Mihaela (887, 888, 898, 900, 906). *Școala de șapte ani Chitila.* Clasa VII-a. Chițimia M. Eustațiu (787, 823, E: 266, 267, 269, 271, 273). Electrician: Cucuet Ioan (912, 928, 999, E: 295, 296, 298, 335). Profesor Dr. Victor Săhăleanu (A. Variabilitate, întâmplare, eroare).

BUZĂU. Clasa XI-a. Bâcă D. Nicolae (904, 905, 906, 908, 910, 923, 946), Jarcău J. Aurel (778, 822, 906, 908, 910, 913, 916, 938, 940, 972, 973, 974, 994).

CĂLĂRAȘI. Școala medie tehnică de mecanizarea agriculturii. Anul I. Marinache Iacob (819, 1042, E: 338, 344, 346), Banu Alexandru (788, 813, 950, 957, 1022, 1040, 1042, 1068, 1069, 1078, 1081, E: 324, 368), Antonaru Nicolae (819, E: 277, 289, 294, 305, 306, 337), Petrovici Gheorghe (819, E: 276, 277, 289, 303, 329, 338).

CÂMPULUNG MOLDOVENESC. Clasa VIII-a. Apetrei Nicolae (327, 328, 335, 337, 339, 344, 347).

CÂMPULUNG MUSCEL. Scoala Pedagogică băieți. Anul IV. Duță I. Gheorghe (787, 944, 971, 973, 974, 1007, E: 309, 310, 314, 316, 335). Clasa X-a liceu. Mănescu C. Mircea (808, 812, 826, 860, 878, 879, 882, 887, 888, 897, 901, 904, 905, 906, 908, 912, 923, 952, 954, 957, 959, 960, 962), Olteanu Constantin (871, 873, 904, 906, 913, 937, 938, 971, 999, 1000), clasa XI-a. Marinescu I. Nicolae (744, 746, 754, 787, 790, 791, 792, 793, 794, 821, 825, 878, 880, 881, 885, 888, 911, 917, 928, 940, 944, 946).

CAREI. Sichet Ovidiu (915, 937, 938, 939, 940).

CLUJ. Armean Ion (Din istoria matematicii. Recreații matematice). Clasa VIII-a. Costin Lucia (952, E: 300, 320, 339, 347), clasa X-a, Haiduc Ionel (794, 816, 834, 1025, 1037), Constantinescu Florin (984, 992, 1012, 1033, 1038, 1040, 1042, 1043), Școala specială de doi ani. Feneșanu Ioan (816, 820, 871, 1033, E: 273), Cutuș Mihai (820, 831, 834, 1033, E: 341), Soiată Viorel (820, 871, 873, 1033, 1038), Sfârlea Vasile (816, 820, 845, 871, 873, 952), Szentanny Arpad (820, 834, 871, 873, 1033), Szappanyos Mihai (820, 834, 845, 871, 873).

CONSTANȚA. Școala hidrotehnică. Anul II. Stepan Ion (787, 904, 950, E: 316, 318, 324), Băcioiu Nicolae (787, 871, 873, 950, 1038, E: 266, 305, 306, 316, 318), Pascu I. Gheorghe (871, 904, 950, E: 305, 306, 318, 324), Anul III. Lambă Stelian (906, 910, 911, 913, 917, 950, 964, 972, 973, 994, 1025, 1037, 1042, P), Clasa VIII-a liceu. Baltă Constantin (971, 973, 974, 999, 1025), Alexandru Stefan (912, 916, 919, 925, 937, 938, E: 280, 329, 330, 335), Ionescu Nicolae (988, 992, 1025, E: 324, 335), Clasa X-a. Chiriţescu Sebastian (E: 317, 320, 322, 325, 329, 331, 344, 345, 347), clasa XI-a. Bădică S. Marin (791, E: 266, 268, 270, 272, 274).

CRAIOVA. Clasa X-a liceu. Mitre M. Nicolae (872, 873, 912, 913, 915, 916, 923, 937, 938, 950, 973, 978, E: 305, 306, 309, 316, 324, 341), Prică Gh. Constantin (777, 791, 797, 798, 799, 803, 824, 834, 841, 842, 845, 946, 950, 952, 974, 1012, 1024, 1033, 1038, 1040, 1043), anul II. Dicu D. Marin (E: 337, 338, 341, 344, 349, 350, 351), Dinu Gheorghe (845, 847, 912, 915, 916, 917, 929, 930, 937, E: 323, 324), Nedelcu Marin (E: 337, 338, 344, 346, 351), Trifan Vasile (820, 904, 913, 940, 973, E: 300, 313), Clasa X-a. Ion N. Matei (738, 913, 915, 916, 923, 937, E: 303, 305, 306, 309, 312, 335), Clasa XI-a. Iliescu C. Florian (819, 830, 847, 867, 882, 905, 908, 916, E: 281, 288, 293).

DEVA. Școala Pedagogică. Anul IV. Draica Constantin (1003, 1012, E: 304, 305, 306, 335).

DOROHOI. Clasa XI-a. Eftimescu Nicolae (841, 871, 873, 912, 1000, E: 266, 300, 324, 335).

DRĂGĂȘANI. S.M.T.A. Com. Voicești. Anul II. Manea I. Nicolae (E: 269, 305, 306, 337, 346, 347), Stelea Florin (871, 873, 937, 971, 999, E: 305, 306, 315, 322, 328, 335, 337).

FOCȘANI. Clasa X-a. Ianuc I. Corneliu (791, 795, 819, 823, 835, 839, 1029, 1033, E: 277, 279, 280, 281, 289, 337, 338, 344, 347, 348, 349, 350), Robănescu Nicolae (876, 910, 917, 923, 938, 972, 973, 974, 999, 1000, 1042, E: 286, 301, 309, 311, 317), Clasa XI-a. Petrovici Radu (805, 806, 813, 816, 823, 831, 834, 842, 850, 863, 864, 866, 867, 871, 872, 873, 878, 879, 885, 887, 889, 892, 904, 906, 908, 923, 929, 938, 940, 943, 946, 950, 951, 952, 954, 959, 974, 992, 999, 1000, 1025, P), Școala Profesională Gugești. Anul II. Munteanu C. Nicolae (973, 974, 999, 1001, E: 271, 275, 280, 310, 344, 346, 347).

GALAȚI. Anul II. Ariton I. Vasile (772, 835, 884, 954, 1046, E: 285, 289, 338, 344), clasa XI-a. Dabija Sorin (785, 786, 787, 788, 791, 794, 795, 797, 798, 800, 801, 804, 806, 816, 819, 822, 823, 824, 826, 827, 831, 834, 835, 837, 841, 843, 845, 846, 848, 851, 853, 861, 863, 864, 865, 872, 873, P).

GHEORGHIENI. Liceul mixt. Clasa X-a. Cilinghir Vladimir (871, 872, 974, 975, E: 318, 320, 322, 324).

GIURGIU. Clasa VII-a. Cârjaliu N. Marin (E: 269, 270, 273, 274, 277, 279, 285, 289, 290, 292, 294, 295, 298, 299), clasa X-a. Bătineţu M. Dumitru (784, 785, 786, 790, 793, 804, 806, 813, 816, 817, 839, 843, 844, 848, 881, 888, 901, 910, 911, 913, 914, 915, 925, 927, 929, 931, 932, 939, E: 296, 300, 301, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, P), clasa XI-a. Fotă M. Stan (785, 798, 799, 804, 806, P), Mateescu Lucia (800, 806, 904, 905, 932, E: 305, 306, 309), Ologu St. Paul (850, 873, E: 269, 272, 277, 285, 289, 290, 292, 296), Mitu St. Velicu (784, 786, 790, 793, 816, 817, 842, 844, 848, 853, 855, 865, 866, 870, 871, 872, 873, 874, 901, 914, 919, 925, 929, 931, 944, 949, 950, 951, 952, 954, 957, 958, 968, 971, 973, 974, 975, 976), anul II. Pante M. Gheorghe (875, 905, 913, 999, 1000, 1001, 1014, E: 319, 324, 329, 330).

HUNEDOARA. Absolvent Cimporescu Doinel (962, 1025, 1029, 1030, 1033, 1036, 1038, 1039, 1040, 1042).

IAŞI. Clasa IX-a. Cazacu I. Dumitru (E: 293, 305, 306, 309, 324), Ropot Paul (E: 279, 299, 305, 306, 335, 336, 349, 350), clasa X-a. Bârsan M. Temistocle (787, 863, 871, 872, 873, 876, 888, 904, 905, 906, 911, 913, 916, 937, 938, 946, 950, 971, 973, 992, 994, 999, 1000, 1001, 1033), Arsintescu I. Virgil (791, 792, 794, 795, 799), Geambaşu Lică (765, 769, 770, 776, 779, 780, 787, 791, 792, 797, E: 257, 258, 260, 261, 263, 266, 268), Vaisman Izu (784, 787, 792, 795, 799, 802, P).

ORADEA. Clasa IX-a. Guiaşu Silviu (767, 792, 838, 839, 840, 850, 882, 926, 986, 999, 1000, 1001, 1019, E: 320, 322, 328, 329, 331, 335, 337, 342, 346, 347, 348, 349, 350, 351, P), Rus Nicolae (871, 872, 873, 876, 904, 912, 916, 919, 937, 938, 966, 974, 976, 999, 1001, E: 305 306, 309, 311, 329, 335, 341), Rus. A. Ion (768, 786, 810, 838, 841, 863, 878, 906, 907, 911, 925, 928, 930, 939, 941, 944, 966, 971, 976, 988, 989, 999, 1029, 1033, E: 274, 277, 281, 290, 291, 294, 300, 314, 315 317, 320, 322, 325, 327, 328, 329, 331, 335, 337, 344, 346, 347, 348, 349, P), Vicaş T. Corneliu (913, E: 929, 337, 343, 346, 350, 351), Clasa X-a. Bocu Mircea (857, 901, 951-960, 962-1004) (55 probleme), Buzuloiu Vasile (814, 819, 821, 822, 827, 828, 832, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 846, 848, 850, 852, 854, 856, 859, 861, 863-876), Junger Robert (834, 841, 850, 877, 888, 915, 944, 972, 973, 974, 1000, 1004, 1025, E: 268, 272, 307, 309, 315, 317, 322, 324, 328, 329, 343, 347, 348, 349, 360), Anul II B. Şandor Vasile (904, 908, 923, 992, 1005, 1037, E: 329, 335), anul III. Gabrian Cornelia (867, 913, 915, 940, 974, 996, 1002, E: 344, 350).

ORAŞUL STALIN. Clasa VIII-a. Minea Florin (E: 325, 326, 327, 328, 331, 332, 334, 335, 336), Clasa X-a. Ionescu Radu (842, 848, 871, 872, 906, 945, 946, 950, 952, 964, 966, 971, 972, 973, 976), Faraga V. Gruia (871, 872, 873, 876, 900, 901, 904, 905, 906, 907, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 919, 921, 923, 932, 937, 938, 940, 941, 942, 944, 950, 971, 972, 973, 974, 976).

PIATRA NEAMŢ. Clasa IX-a. Gheorghiu Elena (E 305, 306, 309, 318, 324, 335), Corduneanu Maria (906, 1038, E: 303, 305, 306, 309, 335, 336, 339), Rapotică Gh. Aurelia (E: 292, 294, 299, 305, 306, 329, 335), Clasa X-a. Gavril Gheorghe (794, 841, 863, 871, 872, 873, 878, 880, 904, 911, 912, 915), Minuţ M. Petru (793, 806, 808, 813, 819, 822, 923, 824, 827, 831, 833, 834, 835, 839, 850, 871, 872, 873, 876, 879, 880, 882, 906, 908, 910, 913, 919, 938, 940, 942, P), Vasilescu Florica (908, 915, 923, 946, 1025, 1038, E: 329, 342).

PITEŞTI. Clasa XI-a. Dragomir Constantin (813, 819, 823, 840, 842, 845, 849, 853, 854, 863, 874, 888, 906, 913, 915, 916, 917, 943, 946, 949, 950, 951, 952, 954, 958, 964, 968, 971, 972, 974, 999, 1000, 1005, 1009, 1018, 1025, 1033, 1042, 1050, E: 290, 291, 292, 293, 294, 295, 299, 300, 301, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 311, 313, 314, 315, 317, 318, 320, 322, 323, 324, 328, 329, 331, 335, 346, 347, 349, 350), Fusaru George (735, 736, 740, 741, 744, 745, 746, 747, 748, 751, 752, 756, 757, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 776, 777, 778, 779, 780), Scoala medie tehnică mecanică. Anul III. Dobre I. Cristian (881, E: 295, 298, 303, 304, 318, 324, 325), Anghel M. Andrei (781, 835, E: 277, 285, 289, 294, 305, 306), Mihai St. Constantin (788, 813, 835, E: 277, 285, 289, 294, 295, 296, 304, 306, 327, 338), Anul IV. Bărbulescu T. Alexandru (740, 746, 770, 778, 819, 823, 825, 888, 900, 901, 908, 923, 929, 951, 958, 1022, 1029, 1046, E: 298, 308, 351, 329, 338, 341, 344, 349, P).

PLOEŞTI. Clasa VI. Comuna Bezdead. Paraschiv Gh. Elena (1005, E: 319, 324, 327, 329, 335), Clasa VIII-a. Dinu Constantin (E: 295, 298, 304, 305, 306, 309, 318, 322), Clasa X-a. Dăscălescu Gheorghe (739, 742, 745, 751, 766, 768, 787, 788, 792, 797, 813, 819, 822, 823, 827, 834, 835, 839, 904, 906, 908, 912, 913, 915, 923, 931), Jipa Gh. Vasile 900, 908, 999, 1033, 1037, 1038, 1040, 1042, 1043), Pevelescu Petre (902, 908, 910, 919, 923, 928, 932, 936, 940, 942, 954, 966, 972, 976, 1033, 1042), Ungureanu Gheorghe (838, 904, 907, 913, 915, 916, 919, 922, 938, 952, 960, 971, 972, 974, 976), Clasa XI-a. Silion Dinu (765, 767, 770, 785, 788, 802, 813, 854, 881, 884, 885, 895).

PREDEAL. Şcoala medie «Dimitrie Cantemir». Clasa XI-a. Alexa Ioan (788, 789, 791, 792, 794, 800, 803), Apostu Gheorghe (784, 787, 788, 791, 792, 794, 800, 803), Epuraş Marin (791, 792, 793, 794, 800, 803, E: 266, 272, 291, 329, 335, 336), Budin I. Constantin (838, 841, 842, 845, 853, 859, 887, 889, 892, 893. 894, 946, 952, 954, 962, 969, 973, 974, 975, 976, 989, 1001, 1002, 1008, 1012, 1017), Grebencea Boris (784, 785, 787, 788, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 800, 803, 804, 805), Greculescu Ion (784, 787, 788, 792, 800, 803), Pupăzan V. Nicolae (793, 816, 819, 826, 833, 835, 841, 842, 848, 853, 859, 863, 864, 867, 868, 871, 872, 873, 875, 887, 888, 889, 892, 904-908, 910, 911, 913, 923, 937, 940, 942, 946, 950, 951, 952, 962, 971, 972, 974, 975, 978, 986, 992, 999, 1000, 1001, 1002, 1004, 1008, 1012, 1014, 1017, 1019), Uţă Marin (829, 833, 839, 841, 845, 848, 853, 859, 878, 879, 880, 881, 888, 889, 892, 893, 894, 914, 916-923, 927-935, 937-940, 943, 944, 946, 948, 949, 950, 952, 954, 957,-963, 967, 968, 970, 971, 974, 976, 978, 979, 980, 985, 988-1003, 1008, 1012, 1017, P).

RĂDĂUŢI. Cârciu Octavian (819, 823, 824, 826, 827, 863, 864, 865, 867, 869, 872, 873, 874).

RÂMNICUL SĂRAT. Clasa IX-a. Frangu Iulia (1038, E: 279, 286, 358, 360), Clasa X-a. Dorobăţ I. Eftimie (904, 946, 950, 971, 972, 974, 1025, E: 325), Stamatiu I. Alexandru (970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 978, 979).

RÂMNICUL VÂLCEA. Clasa IX-a. Băeşu I. Dumitru (904, 906, 916, 1038, E: 305, 306, 309, 335, 336), Zigulescu D. Maria (838, 871, 872, 876, 904, 906, 915, E: 317, 318), Clasa XI-a. Dumitrescu C. Nicolae (905, 913, 915, 923, 932, 938, 992, 1025, 940, 1042, E: 305, 306, 313), Zigulescu D. Marin (831, 885, 891, 930, 937, 938, 940, 942, 943, 944, 964, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 992, 993, 994, 996, 998, 1007, 1025, 1033, 1037, 1040, 1038, 1042).

ROMAN. Clasa VIII-a. Florea V. Marlena (764, 765, 767, 787, 819, 823, 825, 834, 839, E: 262, 263, 266, 268, 269, 271, 273, 274, 275, 276, 277, 281, 285, 292, 295, 298

301, 335, 336), Clasa IX-a. Juncu Gelu (768, 838, 863, 864, 867, 904, 912, 913, 915, 916, E: 291, 292), clasa XI-a. Mitrofan Gheorghe (838, 870, 871, 872, 873, 875, 876, E: 292, 293, 294, 296, 300).

SFT. GHEORGHE. Clasa X-a Zakarias Ştefan (878, 879, 937, 938, 940, 944, 946, 973, 974, 976, E: 306, 312, 313, 317, 322).

SADU (Craiova). Pavel N. Nicolae (838, 871, 872, 873, 876, 878, 904, 912, 923, 928, 973, 974, 999, E: 292, 294, 304, 305, 306, 309, 310, 311, 313, 314).

SIBIU. Clasa XI-a. Crăciun Nicolae (871, 872, 873, 904, 905, 908, 909, 910, 913, 915, 917, 923, 931, 938, 940, 946, 950, 953, 956, 972, 974, 984, 1009, 1019, 1025, 1042), Zorilescu Dan (863, 871, 874, 910, 984, 998, 1033, 1038, 1042, 1043).

SIGHIŞOARA. Clasa X-a. Capesius Ingrid (1042, E: 329, 338, 339, 347, 348), Clasa XI-a. Borzea Eugen (819, 871, 872, E: 285, 290, 292, 298).

SLATINA. Badea D. Constantin (702, 711, 714, 724, 729, 737, 740, 741, 743, 744, 745, 746, 748, 755, 752, 761, 762, 772, 779, 791, 798, 806), Clasa IX-a. Dumitraşcu I. Ilie (904, 913, 938, E: 305, 306, 309, 312), Clasa IX-a. Florea Ion (834, 904, 906, 913, 915, 923, 938), Petrulian I. Stefan (774, 793, 871, 872, 881, E: 251, 274, 335), Popescu I. Clement (793, 871, 872, 938, E: 251, 274, 335), Popescu Gh. Sergiu (766, 775, 801, 815, 819, 855, 875, 950, 952, 1000).

SUCEAVA. Clasa IX-a. Mândicescu Gheorghe (871, 872, 873, 875, 906, 915, 937, 938, E: 266, 292, 294, 297, 305, 314, 339, 341, 342, 344, 346, 349, 351), Moroşan Dumitru (872, 905, 929, 938, 999, 1000, E: 292, 294, 304, 308, 312, 313, 314, 321, 341, 349), Rotaru Constantin (822, 823, 838, 871, 872, 874, 876, 888, 906, 915, 972, 991, 999, 1000, E: 266, 269, 270, 271, 274, 276, 277, 281, 285, 289, 296, 301, 304, 405, 306, 311, 312, 314, 316, 318, 323, 324, 327, 333, 335, 339, 342, 343, 346, 347, 351), Clasa X-a. Budai Teodor (845, 946, E: 288, 293, 297, 300).

TÂRGOVIŞTE. Oprea A. Aurelian (794, 799, 863, 907, 913, 964, 972, 992), Brebente Corneliu (704, 705, 724, 744, 748, E: 220, 221, 225, 228, 236, 239), Clasa XI-a. Ionescu I. Ion (762, 791, 812, 828, 861, 863, 868, 885, 906, 907, 911, 917, 925, 926, 927, 928, 930, 934, 937, 939, 940, 941, 942, 948, 950, 954, 957, 964, 968, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 1022, 1023, 1025, P).

TÂRGU JIU. Floroiu Gh. Ion (E: 305, 306, 309, 336, 351), Crăciun V. Constantin (889, 923, 952, 1014, 1025, 1029, 1033, 1040, 1042, 1043), Şcoala Pedagogică, anul I. Gherghinoiu C. Radu (E: 305, 306, 309, 318, 327, 330, 335), Gărăiacu Ilie (E: 306, 309, 327, 335, 351), anul IV. Cătu C. Nicuşor (871, 873, 875, 876, 904, 912, 914, 915, 923, 926, 937, 938, 942, 972, 973, 974, 976, 999, 1019, E: 303, 304, 305, 306, 314, 326, 329, 334, 335, 337), anul I. Adam I. Constantin (E: 305, 306, 309, 318, 344), Bălănescu Valentin (E: 318, 330, 337, 344, 346, 351), Voidianu S. Serafim (E: 305, 306, 309, 336, 344, 351), Văcaru I. Ion (822, E: 306, 336, 344, 351), clasa X-a. Popescu H. Nicu (737, 742, 754, 756, 765, E: 245), Clasa XI-a. Croicu D. Constantin (787, 791, 794, 842, 787, 888, 889, 897, 904, 923, 929, 932, 940, 962, 972, 1025, E: 306), Olaru I. Grigore (787, 791, 794, 839, 842, 889, 905, 907, 909, 910, 911, 923, 944, 946, 950, 952, 962, 1012, 1025), Tomescu C. Petrică (1025, 1029, 1033, 1038, 1040, 1042, P).

TÂRGUL MUREŞ. Profesor Petru Alexa (A. «Asupra formulei lui Newton-Simpson). Clasa XI-a. Angheluţă Florin (784, 785, 787, 788, 791, 792, 793, 794, 800, 805, 806), Bunica M. Octavian (791, 794, 795, 797, 798, 800, 819, E: 266, 268, 271, 273, 277, 279, 280, 285, 286, 289), Hegedus Atila (E: 292 293, 335, 341, 344), Paşcanu Eugen (772, 773, 784, 792, 800, 838, 839, 863, 864, 872, 873, 876).

TECUCI. Clasa X-a Corban Adrian (952, 962, 971, 972, 974, 999, 1018, 1033, 1038, 1040, 1043, E: 300, 319, 323, 324, 339, 342, 344, 346, 349, 350, P), Strat V. Gheorghe (875, 904, 916, 917, 923, 942, E: 290, 292, 233, 294, 296, 306, 317, 318, 320), Clasa XI-a. Mitu Alexandru (787, 822, 868, 878, 903, 906, 931, 950, 992, 993, P), Palade Marin (837, 841, 906, E: 290, 292, 296, 306, 317, 318, 320, 324).

(va urma)

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— Rezolvarea fiecărei probleme trebue făcută separat cu aplicaţiile necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceeaşi foaie, iar fiecare soluţie să fie precedată de numărul de ordine al problemei şi enunţul complet. După soluţionarea problemei, scrieţi citeţ numele, clasa şi şcoala unde urmaţi sau ocupaţia şi adresa, şi trimiteţi problemele aşezate în ordinea lor numerică.

— Se mai primesc soluţii numai la problemele cu numărul de ordine 977, şi următoarele, iar pentru exerciţiile elementare dela E: 325 şi următoarele, adică, din ultimele cinci numere din R.M.F.

* * *

— Problemele ce se propun de către colaboratorii revistei să fie clar compuse, însoţite de soluţii, să fie personale şi nu luate din cărţi sau reviste, iar trimiterea lor să se facă odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au soluţionat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse găsite necorespunzătoare nu se pot publica.

— Dorim mai multă colaborare la R.M.F. a profesorilor de matematică şi fizică în antrenarea elevilor la rezolvarea problemelor.

— Fiecare cetitor al R.M.F. este rugat a face cunoscută revista şi altor cunoscuţi, pentru a mări astfel, numărul colaboratorilor.

— Reclamaţiile de neprimirea R.M.F. sau cereri de numere vechi se pot face: Oficiul Special de expediere a Presei din Bucureşti, str. Constantin Mille nr. 14, telefon 5—28—90.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice şi fizice, articole, dări de seamă asupra activităţii cercurilor de matematică şi fizică pentru elevi, cereri, sugestii şi propuneri, etc. se trimit pe adresa: REVISTA MATEMATICA ŞI FIZICA, str. Dionisie Lupu, Nr. 40, raionul Stalin, Bucureşti.

ABONAMENTELE PE ANUL 1954

se primesc la toate Oficiile Poştale dela oraşe şi sate, prin factorii poştali, prin propagandişti precum şi la secţiile raionale de difuzare a presei. Tarif pentru profesori, muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 1818. — INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREŞTI

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E 1426

KAT

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

ANUL V

FEBRUARIE 1954

2

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

	Pag.
1. *Cum apar unele numere iraţionale în Geometrie şi despre calculul lor cu ajutorul algoritmului lui Euclid de Ion Barbălat*	29
2. *Folosirea energiei atomice*	36
3. *Probleme rezolvate (E: 302; E: 312; E: 321; 543; 689; 741; 754; 792; 817; 866; 867; 869; 880; 888; 889; 892; 893; 900)*	40
4. *Probleme propuse (1164—1192)*	47
5. *Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 411 — E: 421)*	49
6. *Probleme propuse pentru «Olimpiada tinerilor matematicieni» (E: 422 — E: 446)*	50
7. *Rubrica rezolvitorilor de probleme*	52

ANUL V — 2 — FEBR. 1954

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA: Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul V, Nr. 2 Februarie 1954

CUM APAR UNELE NUMERE IRAŢIONALE IN GEOMETRIE ŞI DESPRE CALCULUL LOR CU AJUTORUL ALGORITMULUI LUI EUCLID

ION BARBĂLAT

1. Din punct de vedere istoric, apariţia numerelor iraţionale în geometrie a fost ocazionată de teorema lui Pitagora, care are drept consecinţă imediată că *diagonala unui pătrat de latură 1 este un număr al cărui pătrat este egal cu 2.*

Nu există însă, nici un număr raţional al cărui pătrat să fie 2. Dacă un astfel de număr raţional ar exista, el s'ar putea scrie sub forma $\frac{p}{q}$, p şi q fiind două numere naturale *prime între ele* şi $q \neq 0$. Ar trebui deci, să avem:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad \text{sau} \quad p^2 = 2\,q^2 \tag{1}$$

Numărul p^2 este divizibil cu 2; cum orice pătrat perfect conţine factorii săi primi la puteri perechi, p^2 va fi divizibil cu 4 şi deci, $2\,q^2$ va fi divizibil cu 4, adică, q^2 va fi divizibil cu 2. Insă cum q^2 este divizibil cu 2 şi este un pătrat perfect, va fi divizibil cu 4. Rezultă că p şi q sunt divizibili cu 2, adică, *nu sunt primi între ei*, contrar ipotezei iniţiale.

Această contradicţie ne dovedeşte imposibilitatea relaţiei (1) sau cu alte cuvinte, ne arată că $\sqrt{2}$ *este un număr iraţional.*

In mod analog, fie α un număr natural, care se descompune în factori primi într'un mod unic

$$\alpha = p_1^{r_1}\, p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n} \tag{2}$$

Dacă exponenţii $r_1, r_2, \ldots, r_n$ *ai factorilor săi primi nu sunt toţi multipli ai unui număr natural* $k \geqslant 2$, *nu există nici un număr raţional care ridicat la puterea* k *să fie egal cu* α, sau altfel spus, *numărul* $\sqrt[k]{\alpha}$ *este iraţional.*

Dacă ar exista un număr raţional a cărui putere k ar fi egală cu α am putea găsi două numere naturale p şi q *prime între ele* şi $q \neq 0$ astfel ca

$$\left(\frac{p}{q}\right)^k = \alpha \quad \text{sau} \quad p^k = \alpha q^k \tag{3}$$

Să presupunem că r_1 nu este divizibil cu k; numărul p^k fiind divizibil cu $p_1^{r_1}$ va fi divizibil şi cu p_1^{δ}, unde δ este cel mai mic multiplu comun al numerelor r_1 şi k şi unde, în baza ipotezei, $\delta > r_1$ şi $\delta > k$, *va rezulta că* p *este divizibil cu* p_1^s, *unde* $s = \frac{\delta}{k}$.

Deoarece p^k este divizibil cu p_1^{δ}, relaţia (3) ne arată că αq^k va fi divizibil cu p_1^{δ} şi deci, că q^k este divizibil cu $p_1^{\delta - r_1}$. Fie μ cel mai mic multiplu comun al lui k şi $\delta - r_1$, unde $\mu > k$ şi $\mu > \delta - r_1$. Rezultă că q este divizibil cu p_1^{ν} unde $\nu = \frac{\mu}{k}$ şi deci p şi q nu sunt primi între ei, contrar ipotezei făcute.

Exemple. Dacă p este prim şi m un număr natural mai mare decât 1, $\sqrt[m]{p}$ este un număr iraţional.

Dacă $p_1, p_2, \ldots p_n$ sunt numere prime diferite, $\sqrt[m]{p_1 p_2 \ldots p_n}$ este un număr iraţional.

Unele numere iraţionale, printre care intră şi acele din exemplele de mai sus, sunt rădăcini de ecuaţii algebrice de grad $n \geqslant 2$ *cu coeficienţi întregi* şi se numesc *iraţionale algebrice.*

De exemplu, $\sqrt[m]{p}$ satisface ecuaţia algebrică $x^m - p = 0$.

Nu trebue să se creadă că orice iraţională algebrică se poate exprima cu ajutorul radicalilor.

Intr'adevăr, s'a putut demonstra că în general, ecuaţiile algebrice de grad $n > 4$ nu sunt rezolvabile prin radicali şi în consecinţă, *nu toate iraţionalele algebrice se pot exprima cu ajutorul radicalilor.*

In afară de iraţionalele algebrice *există iraţionale care nu sunt rădăcini de ecuaţii algebrice cu coeficienţi întregi*; astfel de numere se numesc *transcendente* şi numărul π este un exemplu de iraţională de acest gen *).

Totalitatea numerelor raţionale şi iraţionale constitue *mulţimea numerelor reale.*

Cu toate că matematicienii au lucrat cu numerele reale de peste două milenii, totuşi, teorii care să permită obţinerea *totalităţii numerelor reale* plecând dela numerele raţionale n'au fost elaborate decât în a doua jumătate a secolului al XIX-lea. « Toate aceste teorii au ca scop să obţină deodată, întreg ansamblul tuturor numerelor reale cu ajutorul unui principiu unic de construcţie, plecând dela mulţimea numerelor raţionale » **).

Cele două teorii utilizate în mod curent în matematici — *teoria secţiunilor lui Dedekind* şi *teoria şirurilor convergente a lui* Cantor precum şi diferitele lor extensiuni — nu au în formularea lor, nimic comun cu geometria elementară ***).

Totuşi, ele n'ar fi putut fi descoperite fără experienţa îndelungată a geometriei şi invers, Hilbert n'ar fi putut pune bazele unei axiomatice riguroase a geometriei fără conceptul de număr real, care intervine în ultima axiomă.

In acest articol se vor sublinia unele legături dintre geometria elementară şi numerele reale.

2. Intr'o geometrie neevoluată, în care nu sunt precizate clar elementele geometrice şi axiomele şi în special, modul cum intervin axiomele în demonstraţiile teoremelor şi la introducerea de noţiuni noi, se poate face o obiecţie principială afirmaţiei că apariţia iraţionalelor în geometrie este prilejuită de aplicarea teoremei lui Pitagora, unor anumite triunghiuri dreptunghice.

Intr'adevăr, teorema lui Pitagora se demonstrează ori cu ajutorul triunghiurilor asemenea, deci, cu teorema lui Thales ****), ori cu ajutorul noţiunii de arie.

Insă, o demonstraţie corectă a teoremei lui Thales, ori este făcută cu ajutorul noţiunii de măsură a segmentelor — şi atunci ea implică noţiunea de număr real — ori este precedată de o teorie corectă a proporţiilor. Această teorie *) este bazată pe axioma lui Arhimede şi anume:

Fiind date două segmente A şi B, arbitrare, cu $A \geqslant B$, există un număr natural n astfel ca $n \geqslant 1$

şi $$nB \leqslant A < (n+1)\,B \text{ **).} \qquad (4)$$

Teoria proporţiilor ar fi mult mai simplă dacă pentru orice pereche de segmente A şi B s'ar putea demonstra următoarea propoziţie: (care *nu* este adevărată).

Există două numere naturale m şi n, cu $m \geqslant 1$ şi $n \geqslant 1$, astfel ca $mA = nB$, adică, orice pereche de segmente sunt comensurabile între ele.

Pentru a justifica precauţiile matematice destul de complicate, ce se iau în vederea creierii teoriei proporţiilor (teorie care a fost elaborată de Euclid aproape în totalitatea sa) este necesar să se dea exemple de *segmente incomensurabile* (adică, de segmente A şi B pentru care *nu* există două numere naturale $m \geqslant 1$ şi $n \geqslant 1$, astfel ca $mA = nB$) înainte de a se expune teoria proporţiilor şi deci, înainte de a cunoaşte teorema lui Pitagora şi *bineînţeles, fără a se presupune nici axioma lui* Arhimede. Consideraţii similare pot fi făcute cu privire la demonstraţiile teoremei lui Pitagora cu ajutorul noţiunii de arie.

In concepţia şcolii mistico-filosofice a lui Pitagora, numerele raţionale erau socotite suficiente pentru descrierea fenomenelor naturii şi deci, şi a geometriei. Pitagoricienii nu se îndoiau că toate segmentele trebue să fie comensurabile între ele.

Ei îşi închipuiau că singurul atribut al materiei şi al lumii, este numărul natural şi că deci, *obiectele şi calităţile sunt numere naturale.* Fiecărui obiect îi corespunde un număr natural, reprezentând numărul său de « unităţi ireductibile », denumite de pitagoricieni *monade;* mai susţineau că proprietăţile materiei şi ale sufletului sunt, în realitate, proprietăţi ale numerelor caracteristice respective şi că numărul natural ar fi de esenţă divină şi că depăşeşte realitatea obiectivă, care există numai în măsura în care ea este număr.

Astfel, raportul dintre două segmente A şi B va fi caracterizat de raportul numărului de monade din A şi B, deci va fi un număr raţional. Ne expli-

---

*) Transcendenţa lui π a fost demonstrată în 1882 de *Lindermann.*

**) *A. I. Hincin*, Opt lecţii de analiză matematică p. 14, trad. din limba rusă, Editura de Stat, 1949.

***) Pentru axiomele geometriei elementare, v. N. N. Efimov, Geometrie Superioară, traducere din limba rusă, Editura Tehnică 1952, p. 40—89.

****) Se pare că teorema atribuită în mod curent lui *Thales* din Milet (sec. VI. î.e.n) ar fi opera şcolii lui *Pitagora* (născut în insula Samos, 572 î.e.n).

*) Teoria proporţiilor va fi expusă într'un articol viitor în R.M.F.

**) *N. V. Efimov*: Geometrie superioară, p. 70.

căm astfel, dece teorema lui Pitagora, care duce la relaţia $\frac{d}{l} = \sqrt{2}$ între diagonala d şi latura l a unui pătrat, a fost considerată de pitagoricieni ca o adevărată erezie.

Legenda povesteşte că ei au interzis divulgarea teoremei şi că pitagoricianul Hipas din Metapont, care a transmis-o oamenilor, a fost pedepsit de zei: pe când călătorea pe mare din Grecia Mare (adică din Sud-Est-ul Italiei) spre Athena, Neptun, zeul mărilor, i-a înnecat corabia !

« Discipolii şi elevii lui Pitagora — pitagoricienii — se asociau în uniuni (heterii) mistico-religioase, unde erau primiţi numai oameni aleşi, care trecuseră anumite probe şi care făceau parte, în majoritate, din familiile oligarhice. Heteriile pitagorice activau mai ales în Grecia Mare luând parte la viaţa politică a oraşelor din sudul Italiei, în deosebi a oraşului Crotona, unde trăise o bucată de vreme şi Pitagora. Adepţii lui Pitagora erau apărători convinşi ai aristocraţiei şi în timpul revoluţiilor democratice, erau persecutaţi » *).

Pretinsa armonie universală creată artificial de teoria idealistă a monadelor s'a năruit la primul său contact cu realitatea. O simplă construcţie geometrică a contrazis-o categoric.

Aşa cum ne învaţă I. V. Stalin, s'a verificat încăodată, că soarta unei teorii filosofice este determinată de esenţa ei. « Dacă ea este lipsită de consistenţă şi este clădită pe o temelie falsă, atunci nu va dăinui mult şi va rămâne suspendată în aer » **).

Din toate teoriile filosofice ale pitagoricienilor n'a rămas nimic în picioare. Rămâne însă, mereu valabilă, teorema lui Pitagora care a infirmat concepţiile lor mistice, idealiste.

3. In acest paragraf se va arăta *fără ajutorul teoremei lui Pitagora şi fără ajutorul teoremei proporţiilor sau a ariilor, că latura şi diagonala unui pătrat sunt incomensurabile între ele.*

Fie $ABCD$ un pătrat de latură l şi diagonală d. Din triunghiul dreptunghic isoscel ABC rezultă că

$$l < d < 2l \tag{5}$$

Pe diagonala CA se ia segmentul $CB_1 = l$ şi atunci B_1 este situat între C şi A în baza inegalităţii (5). Din B_1 se duce o perpendiculară pe AC care taie pe AD în C_1. Punctul C_1 este situat între A şi D deoarece, notând cu O centrul pătratului DO este perpendiculară pe AC şi în baza inegalităţii (5) $CO < CB_1$. Triunghiurile dreptunghice CDC_1 şi CB_1C_1 sunt egale căci au ipotenuza comună şi câte o catetă egală, deci, $C_1D = C_1B_1$. Apoi, triunghiul AB_1C_1 are unghiurile alăturate bazei AC_1 egale fiecare cu o jumătate de unghi drept, deci

$$DC_1 = C_1B_1 = B_1A. \tag{6}$$

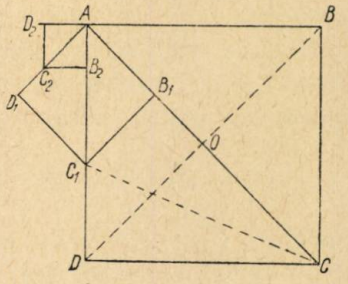


Fig. 1

Din triunghiul dreptunghic isoscel AB_1C_1 se formează prin simetrie faţă de AC_1, pătratul $AB_1C_1D_1$.

Notând cu l_1 şi d_1 latura şi diagonala pătratului $AB_1C_1D_1$, avem:

$$l_1 = d - l \quad \text{şi} \quad d_1 = l - C_1D = l - l_1 = l - (d - l) = 2l - d \tag{7}$$

Cu ajutorul inegalităţii (5) se verifică imediat că

$$l > l_1 > 0 \quad \text{şi} \quad d > d_1 > 0 \tag{8}$$

Despre un segment vom spune că este mai mare decât zero dacă extremităţile sale nu coincid.

Vom repeta construcţia care ne-a făcut să trecem dela pătratul $ABCD$ la pătratul $AB_1C_1D_1$, luând ca pătrat iniţial pătratul $AB_1C_1D_1$. Vom lua deci, $C_1B_2 = AB_1$ şi vom duce în B_2 o perpendiculară pe AC_1 care taie pe AD_1 în C_2, situat între A şi D_1, apoi din triunghiul dreptunghic isoscel AB_2C_2 vom construi prin simetrie faţă de AD_1, pătratul $AB_2C_2D_2$. Notând cu d_2 şi l_2 diagonala şi latura pătratului $AB_2C_2D_2$, vom avea în baza relaţiilor (7) şi (8):

$$l_2 = d_1 - l_1 = 3l - 2d; \quad d_2 = 2l_1 - d_1 = 3d - 4l \tag{9}$$

$$l > l_1 > l_2 > 0 \quad ; \quad d > d_1 > d_2 > 0 \tag{10}$$

Operaţia geometrică poate fi continuată; astfel, pentru pătratul $AB_3C_3D_3$ vom avea:

$$l_3 = d_2 - l_2 = 5d - 7l; \quad d_3 = 2l_2 - d_2 = 10l - 7d \tag{11}$$

$$l > l_1 > l_2 > l_3 > 0 \; ; \quad d > d_1 > d_2 > d_3 > 0 \tag{12}$$

Este clar că orice pătrat $AB_n\,C_n\,D_n$ admite un *următor*, $AB_{n+1}\;C_{n+1}\;D_{n+1}$ şi că deci, se pot construi astfel, o infinitate de pătrate (mai precis, o infinitate numărabilă de pătrate, adică tot atâtea pătrate câte numere naturale există).

Apoi, în baza inegalităţilor (8), (10), (12), avem:

$$\begin{aligned} &l > l_1 > l_2 > l_3 > \ldots > l_n > \ldots > 0 \\ &d > d_1 > d_2 > d_3 > \ldots > d_n > \ldots > 0 \end{aligned} \tag{13}$$

*) V. S. Sergheev, Istoria Greciei Antice, p. 226. tradncere din limba rusă, Ed. de Stat, 1951.

**) I. V. Stalin, Opere, Vol. 1. p. 300. Editura P.M.R., 1948.

Este clar că l_n şi d_n sunt sume algebrice cu coeficienţii numere întregi din d şi l. Pentru a obişnui pe cetitorii elevi cu demonstraţii riguroase, să dovedim această afirmaţie prin *metoda inducţiei complecte.*

In baza relaţiilor (7) afirmaţia este adevărată pentru $n = 1$. Dacă o presupunem adevărată pentru un număr natural $p \geqslant 1$, atunci

$$l_p = \alpha_p d + \beta_p l \quad \text{şi} \quad d_p = \gamma_p d + \gamma_p l \qquad (14)$$

unde α_p, β_p, γ_p, δ_p sunt numere întregi nenule. (Prin definiţie, totalitatea numerelor naturale n şi a opuselor lor $-n$, formează totalitatea numerelor întregi).

In baza relaţiilor (7), avem:

$$l_{p+1} = d_p - l_p = (\gamma_p d + \delta_p l) - (\alpha_p d + \beta_p l) =$$

$$= (\gamma_p - \alpha_p) d + (\delta_p - \beta_p) l$$

şi

$$d_{p+1} = 2l_p - d_p = 2(\alpha_p d + \beta_p l) - (\gamma_p d + \delta_p l) =$$

$$= (2\alpha_p - \gamma_p) d + (2\beta_p - \delta_p) l$$

adică,

$$l_{p+1} = \alpha_{p+1} d + \beta_{p+1} l \quad \text{şi} \quad d_{p+1} = \gamma_{p+1} d + \gamma_{p+1} l \qquad (15)$$

unde α_{p+1}, β_{p+1}, γ_{p+1}, δ_{p+1} sunt numere întregi şi deci afirmaţia noastră este adevărată pentru orice număr întreg. In plus, relaţiile de recurenţă între coeficienţi, sunt:

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \gamma_n - \alpha_n \quad , \quad \gamma_{n+1} = 2\alpha_n - \gamma_n \\ \beta_{n+1} &= \delta_n - \beta_n \quad , \quad \delta_{n+1} = 2\beta_n - \delta_n \end{aligned} \qquad (16)$$

şi cum $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -1$, $\gamma_1 = -1$, $\delta_1 = 2$, în baza relaţiilor (7) relaţiile de recurenţă (16) ne permit calculul efectiv al tuturor coeficienţilor α_n, β_n, γ_n, δ_n pentru orice valoare a numărului natural $n \geqslant 1$ *).

Să facem acum ipoteza că l şi d sunt comensurabile între ele. Există deci, un segment e astfel încât:

$$l = ne \quad \text{şi} \quad d = pe \qquad (17)$$

*) Din relaţiile (16) se deduce că şirurile de numere (α), (β), (γ) şi (δ) satisfac aceiaşi relaţie de recurenţă de ordinul al doilea

$$U_{n+2} + 2U_{n+1} - U_n = 0$$

a cărei ecuaţie caracteristică: $q^2 + 2q - 1 = 0$ are rădăcini reale şi distincte. Aceste şiruri se deosebesc între ele din cauza condiţiilor iniţiale diferite.

Pentru un studiu al relaţiilor de recurenţă, a se vedea: A. I. Marcuşevici, Şiruri Recurente, Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., traducere din limba rusă, Editura Tehnică 1953.

$l \leqslant n \leqslant p$ fiind două numere naturale. In acest caz

$$\begin{aligned} l_1 &= n_1 e \text{ şi } d_1 = p_1 e, \quad \text{deasemenea} \\ l_2 &= n_2 e \text{ şi } d_2 = p_2 e \text{ şi în general} \\ l_q &= n_q e \text{ şi } d_q = p_q e \end{aligned} \qquad (18)$$

unde

$$n, n_1, n_2, \ldots n_q, \ldots \quad \text{şi} \quad p, p_1, p_2, \ldots p_q, \ldots$$

sunt numere naturale nenule deoarece l_q şi d_q sunt sume algebrice cu coeficienţi întregi din d şi l. In baza inegalităţilor (13) avem:

$$\begin{aligned} n &> n_1 > n_2 > \ldots > n_q > \ldots > 0 \\ p &> p_1 > p_2 > \ldots > p_q > \ldots > 0. \end{aligned} \qquad (19)$$

Se ştie însă, că nu există decât un număr finit de numere naturale mai mici decât un număr natural dat. Rezultă că nu se poate construi decât un număr finit de pătrate în fig. 1, contrar constatării făcută mai sus că există o infinitate numărabilă de asemenea pătrate. *Deci, ipoteza de comensurabilitate a laturii şi diagonalei pătratului conduce la contradicţie şi deci, l şi d sunt incomensurabile între ele.* In plus, vom observa că această teoremă a fost demonstrată fără ajutorul axiomei lui Arhimede.

4. Imitând demonstraţia din paragraful precedent *vom dovedi că latura şi înălţimea triunghiului echilateral sunt incomensurabile între ele.* Vom demonstra propoziţia echivalentă, că înălţimea h a unui triunghi echilateral ABC şi semilatura sa a sunt incomensurabile între ele.

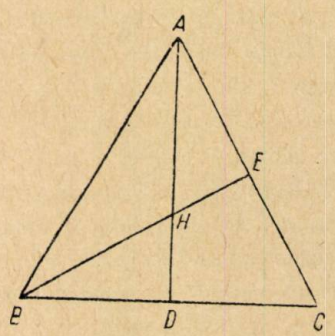


Fig. 2

Fie AD şi BE două înălţimi ale triunghiului echilateral ABC. Din triunghiul dreptunghic ADC rezultă că $AD < AC$, deci, $h < 2a$. Punctul de întâlnire H al înălţimilor se află pe BE între B şi E astfel încât $2HE = BH$, deci, $BH = \frac{2}{3} h$. In triunghiul dreptunghic BHD avem $BH > BD$, deci, $\frac{2}{3} h > a$. Aşa dar,

$$3a < 2h < 4a. \qquad (20)$$

Fie (fig. 3) B_1' un punct între D şi A astfel ca $DB_1' = DE = a$, D_1' proiecţia sa pe AC şi C_1' simetricul său faţă de D_1'. Triunghiul $AB'C$ este echilateral. Fie R proiecţia lui E pe AD; punctul R este mijlocul lui AD; fie Q proiecţia lui D pe AC şi S intersecţia perpendicularei din D_1' pe BC cu dreapta SQ.

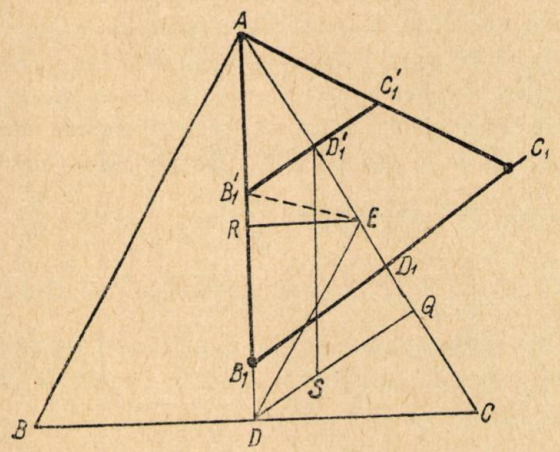


Fig. 3

Triunghiurile dreptunghice SQD_1', ERD sunt egale, deoarece au unghiurile ascuţite egale şi $D_1'S = B_1'D$ ca paralele cuprinse între paralele iar $B'D = ED$ prin construcţie. Deci, $D_1'Q = DR = \frac{h}{2}$. Cum punctul D_1' este situat între A şi Q deoarece B_1' este situat între A şi D, rezultă că

$$AD_1' + \frac{h}{2} + QC = 2a$$

şi cum $QC = \frac{a}{2}$, vom avea

$$AD_1' = \frac{3}{2}a - \frac{h}{2} \qquad (21)$$

Punctul D_1' este situat între A şi E căci

$$\frac{3}{2}a - \frac{h}{2} < a$$

în baza inegalităţii (20).

Fie B_1, D_1, C_1 simetricele lui A respectiv faţă de B_1', D_1', C_1'. Triunghiul AB_1C_1 este echilateral şi are laturile şi înălţimea duble faţă de cele ale triunghiului echilateral $AB_1'C_1'$. Punctul B_1 este situat între A şi D căci $AB_1 = 2(h - a) < h$ şi punctul D este situat între A şi Q. Notând cu a_1 semilatura triunghiului echilateral AB_1C_1 şi cu h_1 înălţimea sa şi ţinând seama de relaţia (21), avem

$$a_1 = h - a \quad , \quad h_1 = 3a - h \qquad (22)$$

şi

$$a > a_1 > 0 \quad , \quad h > h_1 > 0 \qquad (23)$$

aceste inegalităţi fiind o consecinţă a inegalităţilor (20) şi a formulelor (22).

Aşa cum din triunghiul echilateral ABC s'a construit triunghiul echilateral AB_1C_1, din acesta se construieşte un triunghi echilateral AB_2C_2 apoi, din acesta triunghiul echilateral AB_3C_3 şi aşa mai departe. Se poate deci, construi o infinitate numărabilă de triunghiuri echilaterale, deduse unul din altul prin procedeul de mai sus.

Semilaturile lor $a, a_1, a_2, a_3, \ldots$ şi înălţimile lor $h, h_1, h_2, h_3, \ldots$ vor satisface inegalităţile

$$\left.\begin{aligned} a > a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_u > \ldots > 0 \\ h > h_1 > h_2 > h_3 > \ldots > h_n > \ldots > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

iar a_n şi h_n sunt sume algebrice cu coeficienţi întregi din h şi a.

Notând

$$a_n = \alpha_n h + \beta_n a \quad \text{şi} \quad h_n = \gamma_n h + \delta_n a \qquad (25)$$

se verifică imediat cu ajutorul relaţiilor (22) că avem formulele de recurenţă

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{n+1} = \gamma_n - \alpha_n \quad , \quad \gamma_{n+1} = 3\alpha_n - \gamma_n \\ \beta_{n+1} = \delta_n - \beta_n \quad , \quad \delta_{n+1} = 3\beta_n - \delta_n \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

şi cu valorile iniţiale

$$\alpha_1 = 1, \ \beta_1 = 1, \ \gamma_1 = -1, \ \delta_1 = 3 \ ^*) \qquad (27)$$

Demonstraţia incomensurabilităţii lui h cu a este identică cu aceea dată la 3. Dacă ar exista două numere naturale n şi p astfel ca

$$a = ne \quad \text{şi} \quad h = pe$$

unde e este un anumit segment, atunci semilaturile a_q şi înălţimile h_q ale triunghiurilor echilaterale AB_qC_q ar conduce la inegalităţile

$$\left.\begin{aligned} n > n_1 > n_2 > \ldots > n_q > \ldots > 0 \\ p > p_1 > p_2 > \ldots > p_q > \ldots > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

unde

$$a_q = n_q e \quad \text{şi} \quad h_q = p_q e$$

Ipoteza incomensurabilităţii lui h cu a contrazice proprietatea fundamentală a numerelor naturale de a avea un număr finit de numere naturale inferioare unui număr natural dat şi deci h şi a sunt incomensurabile între ele. *Observăm şi în acest caz că demonstraţia s'a făcut fără ajutorul axiomei lui Arhimede.*

Din §§ 3 şi 4 rezultă că într'o geometrie în care nu este adevărată axioma lui Arhimede (adică,

*) Din relaţiile (26) se deduce că şirurile de numere (α), (β), (γ), (δ) satisfac aceiaşi relaţie de recurenţă de ordinul al doilea: $U_{n+2} + 2U_{n+1} - 2U_n = 0$ a cărei ecuaţie caracteristică: $q^2 + 2q - 2 = 0$ are rădăcini reale şi distincte. Şirurile (α), (β), (γ), (δ) sunt diferite; deoarece corespund iniţiale diferite.

într'o *geometrie nearhimediană*) latura şi diagonala pătratului pe de o parte, semilatura şi înălţimea triunghiului echilateral, pe de altă parte, sunt incomensurabile între ele.

Teorema lui Pitagora *nu este adevărată într'o geometrie nearhimediană*. Totuşi, ea este adevărată pentru triunghiurile dreptunghic isoscele şi pentru acele obţinute ducând o înălţime într'un triunghi echilateral, ceeace explică concluziile la care s'a ajuns în paragrafele precedente.

Problema de a caracteriza, într'o geometrie nearhimediană, clasa triunghiurilor pentru care este valabilă teorema lui Pitagora, pare a fi destul de grea.

5. *Algoritmul lui Euclid.* Fie A şi B două segmente arbitrare. In baza axiomei lui Arhimede există un număr natural q_0 şi un segment $R_1 < B$ astfel ca

$$A = Bq_0 + R_1 \quad (q_0 \geqslant 0) \tag{29}$$

Repetând operaţia pentru segmentele B şi R_1, vom avea

$$\begin{aligned} B &= R_1 q_1 + R_2 \quad ; \quad (q_1 \geqslant 1) \text{ şi } R_1 > R_2 \\ R_1 &= R_2 q_2 + R_3 \quad ; \quad (q_2 \geqslant 1) \text{ şi } R_2 > R_3 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_{n-2} &= R_{n-1} q_{n-1} + R_n \; ; \; (q_{n-1} \geqslant 1 \text{ şi } R_{n-1} > R_n \\ R_{n-1} &= R_n q_n + R_{n+1} ; \; (q_n \geqslant 1) \text{ şi } R_n > R_{n+1} \end{aligned} \tag{30}$$

Dacă $R_{n+1} = 0$, atunci cu R_n se poate exprima R_{n-2} ca un multiplu al lui R_n, deci, R_{n-2}, deci, R_{n-3}, deci A şi B. Oricare segment care se bucură de aceiaşi proprietate este un divizor al lui R_n, adică de tipul $sR = R_n$, unde s este un număr natural. *Astfel, R_n este măsura comună maximă a lui A şi B, adică, cel mai mare segment pentru care există două numere naturale nenule p şi q astfel ca $A = pR_n$ şi $B = qR_n$ şi segmentele A şi B sunt comensurabile între ele.*

Se observă imediat că algoritmul lui Euclid se va aplica dacă A şi B sunt numere naturale şi atunci R_n va fi cel mai mare divizor comun al numerelor naturale A şi B.

Deasemenea, dacă A şi B sunt polinoame cu coeficienţi reali sau complexi, de grade $a \geqslant b$, atunci *câturile* q_0, q, q_2, ... q_n vor fi polinoame, iar R_1, R_2, ... R_n vor fi deasemenea polinoame de grade ρ_1, ρ_2, ... ρ_n astfel încât:

$$a \geqslant b \geqslant \rho_1 > \rho_2 > \rho_3 > \cdots > \rho_n$$

şi deci, va exista un întreg natural n astfel ca $\rho_{n+1} = 0$. *Deci, polinomul R_n va fi cel mai mare comun divizor al polinomului A şi B.* Aceleaşi concluzii sunt valabile când A şi B sunt polinoame cu coeficienţi raţionali.

Algoritmul lui Euclid, *când se termină*, adică $R_{n+1} = 0$, poate fi aplicat la entităţi algebrice mult mai generale decât cele considerate mai sus şi în acest fapt constă marea lui importanţă.

Revenind la segmente (sau la numere naturale) se vede că în ipoteza $R_{n+1} = 0$ (care pentru numerele naturale este totdeauna verificată) segmentele A şi B sunt comensurabile între ele şi deci, se poate defini *o cea mai mare măsură comună a lor care va fi R_n* şi orice alt segment C care este o măsură comună pentru A şi B va fi *« un divizor »* al segmentului B_n, adică *va exista un număr natural $s \geqslant 1$ astfel ca $B_n = sC$.* Se pot deci, defini în acest caz, rapoartele $\frac{A}{B}$, $\frac{B}{R_1} > 1$, $\frac{R_1}{R_2} > 1, \ldots \frac{R_{n-1}}{R} > 1$, ca rapoartele multiplilor lui R_n ce figurează respectiv la numitorii şi numărătorii de mai sus şi relaţiile (29) şi (30) se pot scrie sub forma:

$$\frac{A}{B} = q_0 + \frac{1}{\left(\frac{B}{R_1}\right)} \; ; \; \frac{B}{R_1} = q_1 + \frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} ; \; \frac{R_1}{R_2} = q_2 + \frac{1}{\left(\frac{R_1}{R_3}\right)} ;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \tag{31}$$

$$\frac{R_{n-2}}{R_n} = q_{n-1} + \frac{1}{\left(\frac{R_{n-1}}{R_n}\right)} \; ; \; \frac{R_{n-1}}{R_n} = q_n$$

adică

$$\frac{A}{B} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} \tag{32}$$

Raportul $\frac{A}{B}$ s'a exprimat sub forma unei *fracţii continui limitate.* Numerele naturale $q_0 \geqslant 0$ şi $q_1, q_2, \ldots q_n \geqslant 1$ se numesc *câturile incomplecte* (sau *parţiale*) ale raportului comensurabil $\frac{A}{B}$ şi fracţiile ordinare

$$\frac{q_0}{1}, \; q_0 + \frac{1}{q_1}, \; q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2}}, \; q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3}}}, \text{ etc.}$$

se numesc *redusele succesive* ale fracţiei continui.

Dacă operaţiile (29) şi (30 *nu se termină*, segmentele A şi B sunt incomensurabile între ele.

Să examinăm aplicarea acestui *aigoritm* în cazul când $A = d =$ diagonala pătratului de latură $A = l$. *In acest caz însă, aplicarea algoritmului*

lui Euclid *nu necesită axioma lui* Arhimede *deoarece egalităţile ce urmează sunt demonstrate direct.*

Fig. 1 şi prima relaţie (7) din § 3 ne arată că

$$d = l + l_1$$

Apoi,

$$l = DC_1 + C_1 B_2 + B_2 A = 2\, l_1 + l_2$$

In mod analog,

$$l_1 = 2\, l_2 + l_3$$

$$l_2 = 2\, l_3 + l_4$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$l_{n-1} = 2 l_n + l_{n+1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sub rezerva demonstrării că fracţia continuă nelimitată

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}} \qquad (34)$$

are un sens, adică, sub rezerva demonstrării convergenţei fracţiei continui, se va putea defini raportul $\frac{d}{l}$ prin această fracţie continuă nelimitată şi totodată *se va putea calcula valoarea numerică a raportului cu aproximaţia dorită, aproximând raportul cu redusele succesive.*

Vom observa că numărul iraţional $\sqrt{2}$, desvoltat în fracţie continuă evident nelimitată (căci dacă ar fi limitată, $\sqrt{2}$ ar fi un număr raţional deoarece s'ar exprima printr'o fracţie ordinară) ne va da:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_1} \quad \text{cu} \quad x_1 > 1.$$

Rezultă că

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

deci,

$$x_1 = 2 + \frac{1}{x_2} \quad \text{cu} \quad x_2 > 1 \quad \text{şi}$$

şi prin urmare

$$x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{x_3}$$

$$x_3 = 2 + \frac{1}{x_4}$$

$$\cdots\cdots$$

sau, sub rezerva subliniată mai sus, $\sqrt{2}$ se exprimă prin fracţia continuă (34) şi redusele succesive îl vor aproxima din ce în ce mai bine. Va rezulta că

$$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$$

6. Vom examina acum, aplicarea *algoritmului lui* Euclid în cazul când $A = h =$ înălţimea unui triunghi echilateral de semilatură $B = a$, sprijinindu-ne pe consideraţiile din paragraful 4 şi vom observa şi în acest caz că *nu se utilizează axioma lui* Arhimede.

Laturile şi înălţimile a două triunghiuri succesive satisfac relaţiilor:

$$h_n + h_{n+1} = 3a_n \quad , \quad a_n + a_{n+1} = h_n \qquad (35)$$

deduse din relaţiile (22).

Eliminând pe h_n între aceste două relaţii, avem

$$a_{n+1} + h_{n+1} = 2a_n$$

Dacă între relaţia $a_n + h_n = 2a_{n-1}$ şi a doua dintre relaţiile (35) se elimină h_n, se obţine:

$$a_{n-1} = a_n + \frac{1}{2} a_{n+1} \qquad (36)$$

valabilă pentru $n \geqslant 1$ şi unde $a_0 = a$.

Deoarece laturile a trei triunghiuri consecutive, de exemplu, ABC, AB_1C_1 şi AB_2C_2 satisfac inegalităţile

$$a > a_1 > \frac{1}{2} a_2 > 0$$

cum se poate imediat verifica bazându-ne pe inegalităţile (20), rezultă întâi, că vom avea în general

$$a_{n-1} > a_n > \frac{1}{2} a_{n+1} > 0 \qquad (37)$$

şi că deci, a_n *intră odată în* a_{n-1} *şi mai rămâne segmentul rest* $\frac{1}{2} a_{n+1}$

Aplicând segmentelor h şi a algoritmul lui Euclid şi ţinând seama de relaţia (36) şi de inegalităţile (37), vom avea succesiv

$$\begin{aligned}
h &= a + a \\
a &= a + \left(\frac{1}{2} a_2\right) \\
a &= 2\left(\frac{1}{2} a_2\right) + \left(\frac{1}{2} a_3\right) \\
\left(\frac{1}{2} a_2\right) &= \left(\frac{1}{2} a_3\right) + \left(\frac{1}{4} a_4\right) \\
\left(\frac{1}{2} a_3\right) &= 2\left(\frac{1}{4} a_4\right) + \left(\frac{1}{4} a_5\right); \\
\left(\frac{1}{4} a_4\right) &= \left(\frac{1}{4} a_5\right) + \left(\frac{1}{8} a_5\right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad (38)$$

Institut de Documentare Tehnică
BUCUREŞTI
OBMEN - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - CMEHA

Sub rezervele făcute în § 5, rezultă că

$$\frac{h}{a} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}} \qquad (39)$$

Dacă se desvoltă numărul irațional $\sqrt{3}$ în fracție continuă, avem

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{x_1} \quad \text{cu} \quad x_1 > 1,$$

Rezultă că $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

Deci, $x_1 = 1 + \dfrac{1}{x_2}$ cu $x_2 > 1$

și $x_2 = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1.$

Deci,

$$x_2 = 2 + \frac{1}{x_3} \quad \text{cu} \quad x_3 > 1$$

și $x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}-1} = x_1$

Deci, $x_3 = 1 + \dfrac{1}{x_4}$; $x_4 = 2 + \dfrac{1}{x_5}$; ...

In consecință, desvoltarea (39) este tocmai fracția continuă nelimitată care-l reprezintă pe $\sqrt{3}$ și $\dfrac{h}{a} = \sqrt{3}$.

Fracțiile continui au o mare importanță teoretică și practică în multe probleme de aritmetică, geometrie și teoria aproximațiilor *).

*) Vezi N. N. Vorobiev, Numerele lui Fibonacci, Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. traducere din limba rusă, Editura Tehnică 1953, p. 26.

FOLOSIREA ENERGIEI ATOMICE

De mult, în timpuri foarte îndepărtate, oamenii primitivi au observat că un bolovan care nu putea fi rostogolit cu mâna liberă putea fi mișcat dacă se proptea sub el o ramură groasă. Astfel s'a descoperit pârghia. Prin aceasta s'a găsit primul mijloc de folosire rațională a energiei omului. Munca lui a fost ușurată. Dela acest prim rezultat omenirea a parcurs un drum lung și greu, dar încununat de succes.

Descoperirea unor noi surse de energie a jucat un rol de seamă în desvoltarea forțelor de producție ale diferitelor orânduiri sociale.

Prima sursă de energie pe care omul a învățat să o folosească a fost aceea a animalelor domestice. Munca la câmp, transportul bunurilor, au fost cu mult ușurate prin folosirea animalelor. In statele orientului antic unde irigarea era foarte desvoltată, se foloseau animalele pentru scoaterea apei necesare irigațiilor. O altă sursă de energie, pe care omul a învățat încă din vremuri îndepărtate să o folosească, a fost forța vânturilor. Vântul a folosit mai întâi, în navigație unde forța sa umfla pânza corăbiilor, mai târziu el a fost întrebuințat pentru mișcarea grelelor pietre de moară. Astăzi, forța vântului este folosită pentru producerea energiei electrice în stațiile electrice eoliene. Apele de munte au contribuit și ele la ușurarea muncii omului, mișcând mai întâi roțile morilor, iar mai târziu, paletele turbinelor uriașelor centrale hidroelectrice. Zeci de miliarde de kilovatiore extrage omul anual, din căderile de apă. Nici credinciosul prieten al omului, focul, nu a fost lăsat deoparte. Focul nu numai l-a încălzit pe om, l-a apărat noaptea împotriva animalelor sălbatice, l-a ajutat să obțină și să lucreze metalele, ci a devenit una din principalele surse de energie mecanică atunci când omul a învățat să-l folosească prin intermediul aburului. Energia pe care ne-o dă focul este de natură chimică. Arderea combustibilului constă după cum se știe, în combinarea oxigenului din aer cu carbonul din combustibil, punând în libertate sub formă de căldură, energia acumulată pe diferite căi.

Nu prea de mult, oamenii au descoperit o nouă formă de energie, energia electrică. Superioritatea acestei forme de energie față de celelalte, constă și în faptul că este foarte ușor transportabilă, costul transportului ei fiind foarte redus. Datorită acestei superiorități, energia electrică a cucerit în foarte scurt timp un loc de frunte în viața omului. Adusă la locul utilizării, energia electrică poate fi transformată în energie mecanică, luminoasă, calorică și așa mai departe, după trebuință. Această posibilitate a transformării energiei dintr'o formă într'alta se datorește faptului că energia este — după cum a definit-o Engels — măsura mișcării materiei, iar diferitele forme de mișcare: chimică, termică, electrică etc., se pot transforma una într'alta.

Cea mai nouă sursă de energie găsită şi care deschide perspective minunate în faţa oamenilor, în caz că va fi folosită în scopuri paşnice, este energia atomică, adică energia care intervine în procesele ce au loc în interiorul atomilor, adică mai precis în nucleele atomice. Descoperirea şi mai ales folosirea energiei atomice a fost posibilă numai datorită studierii aprofundate a structurii atomului, acea părticică infim de mică din care sunt formate toate corpurile.

Atomii sunt atât de mici, încât ar trebui miliarde de miliarde de atomi puşi alături pentru a căpăta un corp având laturile de 1 mm.

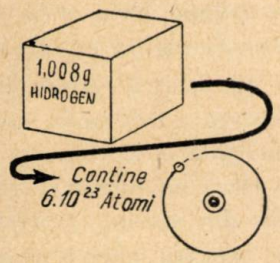


Fig. 1

Aceste părţi atât de mici ale materiei sunt şi ele la rândul lor compuse din alte părţi şi mai mici. Atomii sunt constituiţi în mod asemănător cu sistemul nostru solar; Soarelui nostru îi corespunde nucleul atomului, iar planetelor le corespund electronii care se rotesc în jurul nucleului. Atât electronii cât şi nucleul atomic sunt încărcaţi cu electricitate. Electronii au sarcină electrică negativă, iar nucleul are sarcină electrică pozitivă. Să ne oprim puţin asupra nucleului atomului deoarece posibilitatea folosirii energiei atomice se datoreşte tocmai transformărilor care au loc în acest nucleu.

Nucleul fiecărui atom este compus în linii mari, din două feluri de particule: protoni şi neutroni. Aceste particule au aceeaşi masă, adică, aceeaşi greutate, însă se deosebesc prin faptul că protonii au şi o sarcină electrică (pozitivă), pe când neutronii nu au sarcină electrică, adică sunt neutri din punct de vedere electric, de unde provine şi numele de neutroni. Particulele din nucleu sunt legate între ele prin forţe uriaşe. Cel mai simplu atom este atomul de hidrogen. El se compune dintr'un nucleu format dintr'un singur proton şi dintr'un electron care se roteşte în jurul nucleului, masa lui fiind 1. Cercetările au arătat însă că hidrogenul obişnuit este un amestec de două feluri de atomi. Un atom prezentându-se ca cel descris mai sus ,iar al doilea având un nucleu format dintr'un proton şi un neutron şi în jurul acestui nucleu rotindu-se tot un electron. Acest de-al doilea atom are masa 2 şi a fost denumit deuteriu. Sunt deci, două specii de hidrogen identice din punct de vedere chimic dar cu greutăţi diferite. Astfel de specii ale unui element ocupă acelaş loc în tabloul lui Mendeleev, adică au acelaş număr de ordine (1) şi se numesc isotopi. Fenomenul de isotopie nu se mărgineşte numai la hidrogen, ci îl prezintă majoritatea elementelor. Astfel, heliu este format deasemenea din doi isotopi, unul cu masa 4, altul cu masa 3 şi număr de ordine 2, uraniul este format din 3 isotopi cu masele 234, 235 şi 238 şi numărul de ordine 92, ş.a.m.d. Numărul de ordine ne arată pe lângă locul ocupat de element în tabloul lui Mendeleev, şi numărul electronilor ce se rotesc în jurul nucleului. După cum am mai spus, particulele din fiecare nucleu sunt legate între ele de forţe uriaşe; nucleelor diferitelor feluri de atomi le corespund energii de legătură, diferite. Dacă putem transforma printr'un proces oarecare, un nucleu atomic cu o energie de legătură mare într'un nucleu atomic cu o energie de legătură mică, atunci energia care a rămas de prisos la formarea noului nucleu se transformă în căldură şi radiaţii.

Tocmai în transformările nucleare de acest fel constau sursele de energie atomică.

Incă dela sfârşitul secolului trecut s'a observat că unele substanţe, în special radiul, emit o serie de raze foarte pătrunzătoare. Cercetându-se razele emise de aceste substanţe, s'a observat că unele din ele sunt compuse din nuclee de heliu, adică doi protoni şi doi neutroni, care se mişcă cu viteze extraordinar de mari (aproximativ 20.000 km pe secundă). Aceste nuclee provin din desintegrarea radioactivă a nucleului de radiu. Radiul se transformă în urma pierderii celor doi protoni şi neutroni într'alt element. Cu această ocazie, o fracţiune din energia nucleului se transformă în căldură. Acest proces de desintegrare radioactivă naturală, ar putea fi folosit ca sursă de energie, dacă desintegrarea radioactivă naturală nu ar avea loc foarte încet şi căldura produsă nu ar fi şi ea foarte mică. Un kg. dintr'o substanţă radioactivă naturală, puternică cum e radiul, abia ar da atâta căldură încât să fiarbă într'o oră 1 kg. de apă.

Una din caracteristicele elementelor care prezintă radioactivitate naturală, este perioada lor de înjumătăţire adică timpul necesar pentru ca o jumătate din numărul atomilor conţinuţi la un moment dat în corp să se desintegreze. Pentru radiu această perioadă de înjumătăţire, este de 1590 ani. Devenise evident oamenilor de ştiinţă că dacă doreau să obţină cantităţi de energie mai mari trebuiau găsite procedee prin care să se obţină procese nucleare într'un ritm mult mai rapid decât acela al desintegrării radioactive naturale.

S'au găsit două căi principale de obţinere a energiei din reacţiile nucleare: sau prin desfacerea

unui nucleu — aşa numită fisiune a nucleului — în două părţi cu energii mai mici decât nucleul iniţial, surplusul de energie transformându-se în căldură şi radiaţii, sau prin formarea unui nucleu mai greu din două nuclee mai uşoare — aşa numită sinteză nucleară — în care nucleul format, să aibă energie mai mică decât nucleele iniţiale, surplusul de energie transformându-se şi de data aceasta în căldură şi radiaţii.

Am văzut că uraniul natural este alcătuit din trei isotopi. In ce priveşte proporţia lor trebue spus că uraniu 238 este cel mai răspândit (aproximativ 99,3%), uraniu 235 (aproximativ 0,3%) şi uraniu 234 este în cantităţi neînsemnate. Isotopul radioactiv, adică cel care degajă energie este uraniu 235.

Prin fisiunea nucleară a unui singur kg. de uraniu 235, se obţine aceeaşi căldură care ar fi căpătată prin arderea a 6000 tone de cărbuni, ceeace reprezintă cantitatea de cărbuni care ar umple un tren de 600 vagoane.

Pentru a obţine spargerea, adică fisiunea unu nucleu, este necesar să-l bombardăm cu proiectile de mare energie. Proiectilele acestea sunt tocmai neutronii care, datorită faptului că nu au sarcini electrice, pătrund cel mai uşor prin câmpul electric al electronilor şi nucleului, până în nucleu.

Un nucleu de uraniu fisionat cu un neutron, se desface în două nuclee aproape egale şi odată cu aceasta se emit şi doi sau trei neutroni. Acesta este un fapt foarte important, deoarece aceşti doi-trei neutroni rezultaţi din fisionarea primului nucleu, pot servi la rândul lor la fisionarea altor nuclee. Fiecare nucleu fisionat emite la rândul său, alţi neutroni şi aşa mai departe. Acest mod de fisionare se numeşte în avalanşă sau în lanţ. Fisionarea aceasta în lanţ, produsă în dispozitive speciale numite pile atomice, permite folosirea căldurii obţinute cu ocazia acestui proces. Viteza procesului de fisionare poate fi reglată după dorinţă. In pilele atomice viteza de fisionare este astfel reglată încât pila să nu se încălzească prea tare. Când fisionarea se reglează astfel încât toată cantitatea uriaşă de căldură să fie degajată într'un timp foarte scurt — de exemplu, a milioana parte dintr'o secundă — atunci aceasta se produce sub formă de explozie — ca în bombele atomice; acest lucru se poate întâmpla dacă am dispune numai de uraniu de 235 pur. Pentruca procesul fisionării uraniului uşor amestecat cu cel greu, să fie asigurat este nevoie ca el să aibă loc în prezenţa unei substanţe care să reducă viteza neutronilor (dela maximum 15 000 km/s la 2,7 km/s). Dacă neutronii au o astfel de viteză redusă, ei nu mai pot fi captaţi de către uraniul greu şi pot astfel să fie liberi pentru a provoca şi menţine reacţia în lanţ. O astfel de substanţă încetinitoare (moderatoare) este grafitul.

Viteza cu care se produce reacţia în lanţ, depinde de cantitatea de uraniu greu şi de prezenţa unor absorbanţi speciali pentru neutroni (cadmiu, oţel cu bor).

Un astfel de ansamblu compus din uraniu 238, uraniu 235, moderator (grafit) şi absorbanţi (cadmiu) se numeşte o pilă atomică.

Un proces nuclear în lanţ poate fi deci, uşor reglat într'o pilă atomică introducând în sistem una sau mai multe bare de cadmiu. Prin introducerea cadmiului în pilă, se poate realiza nu numai absorbirea neutronilor ci şi oprirea procesului nuclear. Prin scoaterea treptată a barelor de cadmiu, se pot îmbunătăţi condiţiile de declanşare a procesului nuclear în lanţ. Dacă micşorăm şi mai mult cantitatea de cadmiu din sistem, procesul se desvoltă mai rapid, iar puterea pilei atomice se măreşte.

Intr'o pilă atomică uraniul se află sub formă de bare goale în interior, prin care circulă un gaz care transportă căldura degajată de barele de uraniu.

Barele de uraniu sunt dispuse în pilă într'un bloc de grafit în care se introduc şi barele de cadmiu cu ajutorul cărora se reglează puterea debitată de pilă. Blocul de grafit cu barele de uraniu, este înconjurat de pereţi groşi de protecţie, deoarece radiaţiile care iau naştere în timpul procesului nuclear, sunt vătămătoare.

In blocul de grafit mai sunt făcute şi nişte canale în care se pun diferite substanţe care datorită bombardării lor cu neutroni devin radioactive. Aceste substanţe radioactive artificiale, au căpătat o importanţă foarte mare pentru cercetările din biologie şi tehnică. Astfel de ex. fosforul radioactiv are aceleaşi proprietăţi chimice ca şi fosforul obişnuit. Pentru faptul că substanţele radioactive se identifică uşor datorită radiaţiilor pe care le emit, se poate urmări foarte bine cum decurge asimilarea fosforului de către organism. Cu ajutorul carbonului radioactiv, în industrie, se poate urmări distribuţia acestuia în diferite tipuri de oţeluri. In alte canale, în grafit, sunt introduse camere de ionizare, nişte aparate speciale care măsoară numărul de neutroni ce circulă prin pilă şi deci, puterea pilei, deoarece numărul de atomi fisionaţi este proporţional cu numărul neutronilor. Printr'un mecanism, una din aceste camere asigură coborârea automată în interiorul pilei, a barelor de cadmiu care absorb neutronii, în cazul când

puterea pilei adică intensitatea procesului nuclear, depăşeşte valoare admisibilă.

O pilă este înconjurată de un perete gros protector, pentru a apăra personalul care lucrează, de neutroni şi de radiaţiile gamma care se produc în pilă. In interiorul blocului de grafit sunt făcute canale în care sunt puse barele de uraniu în care au loc procesele de fisionare. Căldura care apare în decursul acestui proces este preluată de o substanţă de răcire, în acest caz, un gaz. Gazul încălzit, ajunge într'un schimbător de căldură încălzind serpentina din el şi transformând apa din serpentină, în abur. Aburul astfel obţinut, pune în mişcare o turbină. Aburul folosit se condensează, transformându-se din nou în apă care este pompată în serpentina schimbătorului de căldură. Aici apa este din nou transformată în abur, procesul se repetă, ş.a.m.d.

Energia nucleară obţinută dela un kg. de uraniu poate asigura timp de 7 ani, funcţionarea unui motor cu o capacitate de 2500 C.P.

S'a calculat deasemeni, că o pilă de uraniu cu o capacitate egală cu aceia a Uzinei Hidroelectrice de pe Nipru (648 000 kW) ar consuma într'un an numai 70 kg uraniu. Iată deci, care sunt posibilităţile pentru întrebuinţarea energiei atomice în scopuri paşnice.

Al doilea tip de reacţii nucleare, sinteza nucleară, este ceva mai complexă. In linii mari, ea constă din combinarea a două nuclee uşoare şi formarea unui nucleu mai greu. In unele cazuri prin aceste reacţii nucleare, se degajă mai multă energie decât la fisiunea nucleară. Astfel, prin combinarea a două nuclee de hidrogen greu compuşi fiecare dintr'un proton şi un neutron, se obţine un nucleu de heliu şi totodată, o cantitate de căldură de câteva zeci de ori mai mare decât la fisiunea nucleară. Această combinare se face însă, în condiţii extrem de grele de obţinut din punct de vedere tehnic, fiind necesară o temperatură de ordinul zecilor de milioane de grade. Pe principiul degajării explosive a căldurii din reacţiile nucleare de sinteză, se bazează bomba cu hidrogen.

Se presupune că reacţiile nucleare de sinteză constituie sursa de căldură a soarelui şi a stelelor luminoase.

Isvoarele de energie atomică sunt uriaşe. Folosirea lor pentru scopuri paşnice ar ridica într'o măsură nemai întâlnită, bunăstarea oamenilor. Lagărul imperialist în frunte cu Statele Unite ale Americii, a încercat să folosească descoperirea resurselor de energie atomică drept mijloc de presiune politică pentru aservirea celorlalte ţări. Acestei tendinţe i se opune cu dârzenie politica de pace dusă de U.R.S.S., care luptă pentru interzicerea folosirii energiei atomice ca armă de agresiune şi de distrugere şi pentru stabilirea unui control internaţional asupra producţiei energiei atomice în scopuri paşnice. Realizările savanţilor şi inginerilor sovietici în domeniul cercetărilor atomice au zădărnicit monopolizarea producţiei energiei atomice de către Statele Unite ale Americii.

In cuvântarea sa, rostită la şedinţa de închidere a celei de a 5-a sesiuni a Sovietului Suprem al U.R.S.S. tovarăşul Malencov a subliniat că Statele Unite demult nu mai sunt monopoliste asupra producţiei bombelor atomice, după cum nici asupra producţiei bombei cu hidrogen.

Consecvent politicii sale de pace, la 21 Decembrie 1953, guvernul sovietic a înmânat ambasadorului S.U.A. în U.R.S.S., o declaraţie în legătură cu discursul preşedintelui S.U.A., Eisenhower, rostit în Adunarea Generală a O.N.U. la 8 Decembrie 1953.

Din textul ei rezultă că Uniunea Sovietică ca şi toate statele iubitoare de pace, nu se poate mulţumi cu propunerea preşedintelui Eisenhower, ca numai «o anumită parte» din rezervele existente de materiale atomice să fie puse la dispoziţia unui organ internaţional aflat sub egida O.N.U., deoarece aceasta ar însemna de fapt, o legalizare directă a producţiei de bombe atomice, deci, o slăbire a vigilenţei faţă de pericolul unui război atomic, şi nicidecum interzicerea armei atomice.

Guvernul sovietic subliniază necesitatea de a folosi nu numai o parte, ci întreaga masă a materialelor atomice în scopuri paşnice — ceeace ar deschide posibilităţi enorme desvoltării industriei, agriculturii şi transportului precum şi pentru folosirea unor descoperiri atomice în medicină, în perfecţionarea tehnicii şi pentru progresul ştiinţei, în general.

Uniunea Sovietică este pentru a se folosi marea descoperire a minţii omeneşti exclusiv pentru progresul civilizaţiei, pentru nevoile paşnice, pentru asigurarea prin toate mijloacele a ridicării bunei stări a populaţiei.

Condiţiile economice-politice din U.R.S.S. şi ţările de democraţie populară oferă posibilităţi unice de desvoltare a producţiei de energie atomică în scopuri paşnice. Prin triumful politicii de pace a Uniunii Sovietice, energia atomică va deveni un bun comun al tuturor oamenilor, fiind pusă în slujba satisfacerii maxime a nevoilor materiale şi culturale mereu crescânde ale oamenilor muncii.

Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. sprijinită de Ministerul Învăţământului şi Uniunea Tineretului Muncitor, organizează în acest an «Olimpiada Tinerilor Matematicieni» pentru elevii claselor a V-a, a VI-a, a VII-a şi «Olimpiada de Matematică» pentru elevii şcolilor de 10 ani, şcoli pedagogice şi medii tehnice.

Problemele pentru «Olimpiada Tinerilor Matematicieni» etapa I-a vor apare într'un supliment al Revistei Matematice şi Fizice care se va distribui gratuit în şcoli. «Olimpiadele» pentru elevii şcolilor medii de toate tipurile se vor desfăşura în mai multe etape:

1. ***Etapa pe şcoală, până la 28 februarie 1954,***
2. ***Etapa locală (în toate localităţile cu şcoli medii) la 7 martie,***
3. ***Etapa pe centre universitare (Bucureşti, Iaşi, Cluj şi Timişoara), la 4 aprilie 1954,***
4. ***Etapa pe ţară la Bucureşti, la 25 aprilie 1954.***

Elevii care nu au putut participa la etapa pe şcoală, pot participa la etapa locală. La etapele următoare, nu pot participa decât cei reuşiţi la etapele precedente.

In numerile următoare ale Revistei Matematice şi Fizice vom publica şi alte informaţii privind modul de desfăşurare a «Olimpiadelor».

Elevi şi eleve, participaţi cu tot avântul vostru la aceste «Olimpiade de Matematici» organizate de către Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R.!

PROBLEME REZOLVATE

Problema E: 302

Un pionier, pornind dintr'un punct de pe latura unui triunghi desenat pe teren, merge paralel cu o altă latură până întâlneşte pe cealaltă, apoi îşi continuă drumul în acelaş mod. Să se arate că drumul pionierului se închide în punctul de plecare şi că lungimea acestui drum nu depinde de poziţia punctului de plecare. Caz particular.

I. Loziciu

Soluţie. Fie M, punctul de plecare. Ducând paralele, conform enunţului, obţinem conturul $MNPQRT$. Din T trebue să ducem paralela la BC. Unim întâi pe T cu M.

Se vede uşor că triunghiurile MCN şi TRB sunt egale având:

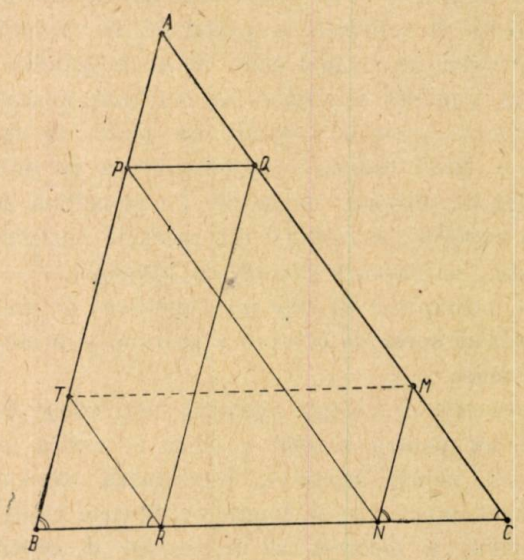
$\sphericalangle MCN = \sphericalangle TRB$ (unghiuri corespondente)

$\sphericalangle MNC = \sphericalangle TBR$, la fel

şi $NC = PQ = BR$, din paralelogramele $NCQP$ şi $PQRB$.

Rezultă că $MN = TB$, încât patrulaterul $TMNB$ este paralelogram (având două laturi opuse şi egale) şi deci $TM \parallel BC$.

Deducem că paralela dusă prin T la BC trece prin M, adică drumul pionierului se închide în punctul de plecare.



Lungimea drumului este aceeaşi, oricare ar fi punctul de plecare.

Intr'adevăr avem:

$MN + NP + PQ + QR + RT + TM = AP + AM + BR + BP + MC + RC$ = perimetrul triunghiului.

Observare. Drumul se închide după ce a atins de două ori fiecare latură. In cazul particular când M este mijlocul laturei, conturul se reduce la perimetrul triunghiului cu vârfurile în mijloacele laturilor şi deci, drumul este jumătate din perimetrul triunghiului considerat.

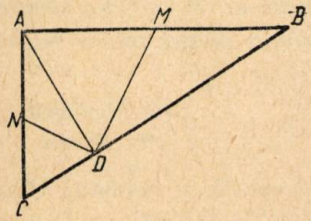
Problema E: 312

Intr'un triunghiu dreptunghic ABC notăm cu D piciorul înălţimii din A, şi cu M, N, mijloacele catetelor. Să se arate că patrulaterul $AMDN$ este inscriptibil.

C. Dragomir
elev, Piteşti

Soluţie: Triunghiurile ADN şi ADM sunt isoscele deoarece:

$$DN = AN = \frac{AC}{2} \quad \text{şi} \quad DM = AM = \frac{AB}{2}.$$



Deci avem:

$$\sphericalangle ADN = \sphericalangle DAN$$

şi

$$\sphericalangle ADM = \sphericalangle DAM.$$

Prin adunare obţinem:

$$\sphericalangle ADN + \sphericalangle ADM = \sphericalangle DAN + \sphericalangle DAM = 90°.$$

Rezultă că $\sphericalangle NDM = 90°$, deci patrulaterul $AMDN$ este indescriptibil.

Problema E: 321

Intr'un triunghiu echilateral ABC ducem înălţimea AH şi prelungim pe BC dincolo de B cu o lungime $BM = BH$. Fie N mijlocul lui AB. Dreapta MN taie pe AH în P. Să se arate că dreapta CP este perpendiculară pe AM.

C. Dragomir
elev, Piteşti

Soluţie: Fie L punctul unde MN taie pe AC. Triunghiul MBN este isoscel deoarece:

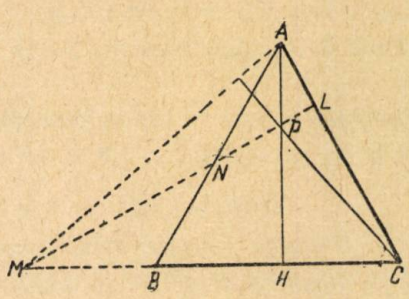
$$MB = BH = \frac{BC}{2} \quad \text{şi} \quad NB = \frac{AB}{2}.$$

Rezultă că

$$\sphericalangle BMN = \sphericalangle BMN = \frac{\sphericalangle ABC}{2} = \frac{60}{2} = 30°.$$

Deci în triunghiul MCL avem:

$$\sphericalangle CML + \sphericalangle MCL = 30° + 60° = 90°.$$



Deci ML este perpendiculară pe AC. Deoarece înălţimile AH şi ML se taie în P, rezultă că CP este a treia înălţime a triunghiului AMC. Deci CP şi AM sunt perpendiculare.

Problema 543

Cîte înfăşurări de sârmă de nichelină trebue puse pe un cilindru de porţelan, cu diametrul de 1,5 cm, pentru ca să se construiască un fierbător, în care să fiarbă o masă de 120 g. de apă în 10 minute, pornind dela temperatura iniţială de 10°C; randamentul 60%, diametrul sîrmei 0,2 mm, tensiunea $U = 100$ V.

C. d. P.

Soluţie. Rezistenţa specifică a nichelinei este 0,4. Fie l lungimea sîrmei. Căldura utilă este

$$0{,}6 \cdot 0{,}24 \cdot \frac{U^2}{R} \cdot t = \frac{2\,160\,000\,\pi}{l} \text{ cal.}$$

Ea este egală cu 120.90 cal., de unde scoatem

$$l = 200\,\pi \text{ cm.}$$

Numărul înfăşurărilor este deci

$$n = \frac{l}{1{,}5\,\pi} = 133{,}3$$

dacă nu ţinem seamă de grosimea sîrmei, şi

$$n_1 = \frac{l}{1{,}9\,\pi} = 105{,}2$$

ţinând seamă de grosimea sîrmei.

Problema 689

Un acumulator de 4 volţi are capacitatea de 36 amperi-oră. Se cere: a) Cîte elemente are acest acumulator şi ce voltaj e necesar pentru încărcarea lui? b) Cîte zile durează descărcarea, dacă acumulatorul e întrebuinţat zilnic câte 4 ore, dând un curent de 0,9 amperi? c) La ce indicaţie a voltmetrului vom considera acumulatorul ca fiind la limita descărcării?

Torjescu Florin
elev, Ploeşti

Soluție. a) Un element având 2 V, rezultă că acumulatorul are 4 : 2 = 2 elemente. Voltajul necesar încărcării este $2 \times 2{,}7 = 5{,}4$ volți.

b) Timpul descărcării este de $36 : (4 \times 0{,}9) = 10$ zile.

c) Acumulatorul este la limita descărcării când tensiunea la borne atinge $2 \times 1{,}8 = 3{,}6$ volți.

Problema 741

Care este frecvența vibrației unei coarde sonore de argint cu lungimea de 40 cm cu secțiunea s = 1 mm², dacă tensiunea aplicată coardei este 1,051 kg. Ce lungime trebue să aibă un tub sonor deschis pentru a emite același sunet dacă în el undele sonore formează două noduri.

Idem, pentru un tub închis. Densitatea argintului este 10,51.

A. Dobrescu
elev, Târgoviște

Soluție.

$$N = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{gG}{s \cdot d}} = \frac{1}{40}\sqrt{\frac{980 \cdot 1051}{0{,}01 \cdot 10{,}51}} = 78.$$

In cazul tubului sonor deschis lungimea sa va fi egală cu distanța dintre cele două noduri, deci cu $\frac{1}{2}\lambda$. Insă $\lambda = \frac{V}{N} = \frac{340}{78} = 4{,}358$ m.

Lungimea tubului este 2,179 m.

Intr-un tub închis se mai formează două noduri și la capetele sale. Lungimea sa va fi deci $\frac{3}{2}\lambda = 6{,}537$ m.

Problema 754

Fluxul de electroni necesar microscopului electronic, este emis într'un tub catodic în care diferența de potențial este V. Cunoscând masa electronului m_e, constanta lui Plank h și viteza luminii c, să se calculeze viteza v a electronilor, lungimea de undă a undei asociate λ și mărimea cuantei de energie (ε) a fluxului.

Valeriu St. Udrescu
elev, Pitești

Soluție. Viteza se calculează din relația

$$eV = \frac{m_e v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m_e}}.$$

Apoi

$$\lambda = \frac{h}{2m_e eV}.$$

(Vezi R.M.F. Nr. 10/1951, pag. 239).

$$\varepsilon = \frac{ch}{\lambda} = c\sqrt{2m_e eV}.$$

Problema 792

Să se afle ce cantitate de căldură e necesară transformării a 150 g. ghiață, cu temperatura de — 10°, în vapori. (Căldura latentă de topire a ghieții este 80 cal; căldura de vaporizare a apei este 539 *cal/g). Descompunând vaporii de apă în hidrogen și oxigen, să se afle volumul acestor gaze la 100°C. ($V_0H = 160$ litri, $V_0O = 80$ litri).*

Gh. Gh. Dănilă
elev, Giurgiu

Soluție. Avem:

$$Q = 150\ [10 \times 0{,}5 + 80 + 100 + 539]$$

$$Q = 108{,}6 \text{ kcal.}$$

Masa specifică moleculară a apei este 18.

Prin urmare

$$V_{100} = \frac{150}{18} V_0 \left(1 + \frac{100}{273}\right)$$

$V_{100}H = 1821{,}750$ litri , $V_{100}O = 910{,}875$ litri.

Problema 817

Avem 200 cm³ dintr'o soluție de 3,65 g HCl într'un litru de apă distilată și o soluție bazică de concentrație necunoscută. Cu un indicator constatăm că soluția acidă e neutralizată de 50 *cm³ din soluția bazică. Să se afle concentrația acestei soluții bazice față de soluția normală.*

Gh. Niculescu
elev, Ploești

Soluție. Greutatea moleculară a acidului clorhidric fiind 36,5, concentrația soluției acide este de 10%.

Concentrația soluției bazice este

$$\frac{200 \text{ cm}^3}{50 \text{ cm}^3} \times 10 = 40\%$$

Problema 866

1. *Se dă un triunghi dreptunghic ABC cu catelele AC = b și AB = c și ipotenuza BC = a.*

Să se determine pe ipotenuză un punct M egal depărtat de vîrful B și de cateta AC.

Determinarea se va face atât prin calcul cît și geometric.

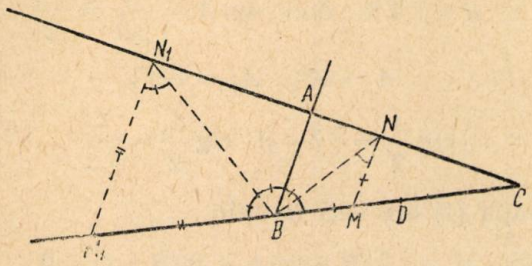
2. *Ce poziție are punctul M față de mijlocul D al ipotenuzei? Poate să coincidă M cu D? Rezultatul se va stabili prin calcul și geometric.*

3. *Ce relație trebue să existe între* a *și* c *pentru ca M să coincidă cu piciorul înălțimii? Să se determine în acest caz* cos *B.*

4. *Să se construiască un triunghi care să îndeplinească condiția dela punctul precedent.*

* * *

Soluție. 1. Vom avea: ($MN \perp AC$, vezi figura)



$$\frac{CM}{CB} = \frac{MN}{BA} \quad \text{sau} \quad \frac{a + BM}{a} = \frac{BM}{c}$$

de unde

$$BM = \frac{ac}{a + c}.$$

Soluție geometrică. Bisectoarele unghiului B taie AC în N și N_1.

Perpendicularele în N și N_1 pe AC taie BC în M și M_1.

2. Avem:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NA}{NC} = -\frac{c}{a}$$

$$\frac{M_1B}{M_1C} = \frac{N_1A}{N_1C} = +\frac{c}{a}.$$

Prin urmare punctele M, M_1 divid armonic segmentul BC și avem

$$\overline{BD}^2 = MD \cdot \overline{M_1D}.$$

Când $M \to D$, $M_1 \to \infty$ sau $A \to C$, deci triunghiul ABC numai există. Mai putem arăta astfel: dacă M ar coincide cu D perpendiculara din D pe AC ar fi egală cu oblica DC, lucru imposibil.

3. Va trebui să avem

$$\frac{ac}{a + c} = \frac{c^2}{a} \quad \text{sau} \quad a^2 = ac + c^2$$

sau

$$1 = \cos B + \cos^2 B$$

$$\cos B = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

4. a și c vor fi respectiv raza cercului și latura decagonului regulat convex înscris în cerc.

Problema 867

Dacă aria sferei înscrise într'un con circular drept este media aritmetică între aria bazei și aria laterală a conului, să se găsească unghiul format de generatoare cu planul bazei.

* * *

Soluție. Fie $2x$ unghiul cerut. Fie r, R, G respectiv raza sferei înscrise în con, raza bazei conului și generatoarea conului. Conform enunțului va trebui să avem:

$$4\pi r^2 = \frac{\pi R^2 + \pi RG}{2}, \quad \text{sau}$$

$$8\left(\frac{r}{R}\right)^2 = 1 + \frac{G}{R}.$$

Insă $\frac{r}{R} = \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}}$; $\frac{G}{R} = \frac{1}{\cos 2x}$.

Rezultă

$$9\cos^2 2x - 6\cos 2x + 1 = 0$$

$$(3\cos 2x - 1)^2 = 0$$

$$\cos 2x = 1/3$$

$$2x = 70^\circ\, 31'\, 43'', 3.$$

Problema 869

Intr'un triunghi oarecare, notăm unghiurile cu A, B, C, laturile cu a, b, c, aria cu S, $a + b + c = 2p$, raza cercului înscris cu r, *iar raza cercului circumscris cu R.*

1. *Să se demonstreze relațiile*

$$S = pr, \quad r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

și că unghiul format de bisectoarele unghiurilor B și C este $90^\circ + \frac{A}{2}$.

2. *Să se construiască un triunghi cunoscând R, r, a. Discuție.*

3. *Să se rezolve triunghiul cunoscând:*

$$R,\ r,\ a = R\sqrt{3}.$$

Să se calculeze laturile b *și* c. *Intre ce limite poate varia raportul r/R ca triunghiul să existe. Să se compare acest rezultat cu rezultatul discuției dela punctul* 2.

* * *

Soluție. 1. Avem

$$S = \frac{a}{2}r + \frac{b}{2}r + \frac{c}{2}r = pr$$

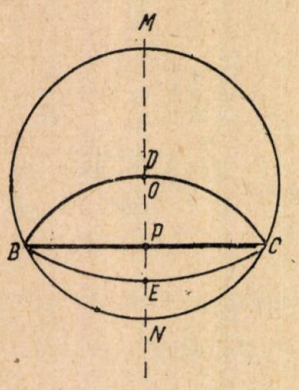
$$r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p} = (p - a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

$$\sphericalangle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - A)$$

$$\sphericalangle BIC = 90^\circ + \frac{A}{2}.$$

2. Acest punct constitue problema 804.

În cercul $O(R)$ luăm coarda $BC = a$. Unghiul A va fi cunoscut. El va putea lua două valori suplimentare:



$$A = \sphericalangle BMC \quad \text{sau} \quad A = \sphericalangle BNC.$$

Locul lui I va fi format din paralelele la BC duse la distanţa r şi din arcele capabile de unghiurile $90° + \frac{1}{2} \sphericalangle BMC$ şi $90° + \frac{1}{2} \sphericalangle BNC$ descrise pe BC deoparte şi de alta. Intersecţiile dreptelor cu arcele de cerc indică numărul soluţiilor problemei *).

Când $r < PE$ vom avea 4 soluţii.
Când $r = PE$ vom avea 3 soluţii.
Când $PE < r < PD$ vom avea 2 soluţii.
Când $r = PD$ vom avea o soluţie.
Când $r > PD$ nu vom avea soluţii.

$$PD = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\left(45° + \frac{A}{4}\right); \quad PE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\left(90° - \frac{A}{4}\right).$$

3 Avem

$$r = \frac{b + c - a}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

de unde

$$b + c = a + 2r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$$

$$S = pr = \frac{1}{2} bc \sin A$$

de unde

$$bc = \frac{2r\left(a + r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}\right)}{\sin A}$$

b şi c sunt deci rădăcinile ecuaţiei:

$$(1) \quad x^2 - \left(a + 2r \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2}\right) x + \frac{2r\left(a + r \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2}\right)}{\sin A} = 0$$

*) Presupunem $\sphericalangle BMC < 90°$.

Insă

$$a = \sqrt{3}\, R, \quad \text{deci} \quad \sin A = \frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 60°, \quad A_1 = 120°,$$

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \sqrt{3} \quad \text{şi} \quad \operatorname{ctg} \frac{A_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ecuaţia (1) are deci formele

$$(2) \quad x^2 - \sqrt{3}(R + 2r)\, x + 4r(R + r) = 0$$

$$(3) \quad x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}(8R + 2r)\, x + \frac{4r(3R + r)}{3} = 0$$

Existenţa triunghiului este echivalentă cu existenţa rădăcinilor ecuaţiei (2) (conform discuţiei dela punctul 2), adică,

$$3(R + 2r)^2 - 16r(R + r) \geqslant 0$$

$$R \geqslant 2r.$$

Verificare. Va trebui să avem

$$r \leqslant \overline{PD}.$$

Insă

$$\overline{PD} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\left(45° + \frac{A}{4}\right) = \frac{\sqrt{3R}}{2} \operatorname{ctg}(45° + 15°)$$

$$\overline{PD} = \frac{1}{2} R.$$

Rezultă $R \geqslant 2r$.

Problema 880

Două întreprinderi industriale se asociază şi execută în 70 zile planul de construcţii de vagoane I.T.B., primind premiu 24.000 lei.

Acest premiu este împărţit de ele invers proporţional cu timpul necesar îndeplinirii aceluiaşi plan de fiecare întreprindere în parte.

Să se afle: 1) In câte zile ar fi executat planul respectiv fiecare întreprindere în parte dacă prima ar fi depăşit pe a doua cu 48 zile. 2) Care sunt cotele fiecărei întreprinderi din premiul acordat?

* * *

Soluţie. Fie x respectiv y zile timpii în care s'ar fi executat de către fiecare întreprindere planul de construcţii. Vom avea

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 70 \quad \text{sau} \quad \frac{xy}{x + y} = 70 \qquad (1)$$

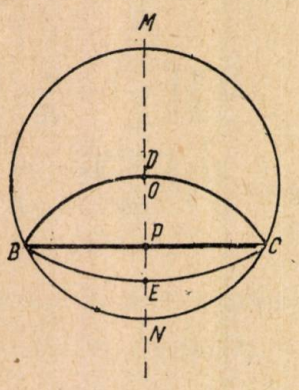
şi

$$x = y + 48 \qquad (2)$$

Inlocuind valoarea lui x, dată de (2), în (1) găsim:

$$y^2 - 92y - 3360 = 0$$

În cercul $O(R)$ luăm coarda $BC = a$. Unghiul A va fi cunoscut. El va putea lua două valori suplimentare:



$$A = \sphericalangle BMC \quad \text{sau} \quad A = \sphericalangle BNC.$$

Locul lui I va fi format din paralelele la BC duse la distanţa r şi din arcele capabile de unghiurile $90° + \frac{1}{2} \sphericalangle BMC$ şi $90° + \frac{1}{2} \sphericalangle BNC$ descrise pe BC deoparte şi de alta. Intersecţiile dreptelor cu arcele de cerc indică numărul soluţiilor problemei *).

Când $r < PE$ vom avea 4 soluţii.
Când $r = PE$ vom avea 3 soluţii.
Când $PE < r < PD$ vom avea 2 soluţii.
Când $r = PD$ vom avea o soluţie.
Când $r > PD$ nu vom avea soluţii.

$$PD = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\left(45° + \frac{A}{4}\right); \quad PE = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\left(90° - \frac{A}{4}\right).$$

3 Avem

$$r = \frac{b + c - a}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

de unde

$$b + c = a + 2r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$$

$$S = pr = \frac{1}{2} bc \sin A$$

de unde

$$bc = \frac{2r\left(a + r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}\right)}{\sin A}$$

b şi c sunt deci rădăcinile ecuaţiei:

$$(1) \quad x^2 - \left(a + 2r \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2}\right) x + \frac{2r\left(a + r \cdot \operatorname{ctg} \frac{A}{2}\right)}{\sin A} = 0$$

*) Presupunem $\sphericalangle BMC < 90°$.

Insă

$$a = \sqrt{3}\, R, \quad \text{deci} \quad \sin A = \frac{a}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 60°, \quad A_1 = 120°,$$

$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \sqrt{3} \quad \text{şi} \quad \operatorname{ctg} \frac{A_1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ecuaţia (1) are deci formele

$$(2) \quad x^2 - \sqrt{3}(R + 2r)\, x + 4r(R + r) = 0$$

$$(3) \quad x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}(8R + 2r)\, x + \frac{4r(3R + r)}{3} = 0$$

Existenţa triunghiului este echivalentă cu existenţa rădăcinilor ecuaţiei (2) (conform discuţiei dela punctul 2), adică,

$$3(R + 2r)^2 - 16r(R + r) \geqslant 0$$

$$R \geqslant 2r.$$

Verificare. Va trebui să avem

$$r \leqslant \overline{PD}.$$

Insă

$$\overline{PD} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg}\left(45° + \frac{A}{4}\right) = \frac{\sqrt{3R}}{2} \operatorname{ctg}(45° + 15°)$$

$$\overline{PD} = \frac{1}{2} R.$$

Rezultă $R \geqslant 2r$.

Problema 880

Două întreprinderi industriale se asociază şi execută în 70 zile planul de construcţii de vagoane I.T.B., primind premiu 24.000 lei.

Acest premiu este împărţit de ele invers proporţional cu timpul necesar îndeplinirii aceluiaşi plan de fiecare întreprindere în parte.

Să se afle: 1) In câte zile ar fi executat planul respectiv fiecare întreprindere în parte dacă prima ar fi depăşit pe a doua cu 48 zile. 2) Care sunt cotele fiecărei întreprinderi din premiul acordat?

* * *

Soluţie. Fie x respectiv y zile timpii în care s'ar fi executat de către fiecare întreprindere planul de construcţii. Vom avea

$$\frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 70 \quad \text{sau} \quad \frac{xy}{x + y} = 70 \qquad (1)$$

şi

$$x = y + 48 \qquad (2)$$

Inlocuind valoarea lui x, dată de (2), în (1) găsim:

$$y^2 - 92y - 3360 = 0$$

de unde

$$y = 120 \text{ zile}$$

$$x = 168 \text{ zile}$$

2 $$\frac{p_x}{\frac{1}{168}} = \frac{p_y}{\frac{1}{120}} = \frac{p_x + p_y}{\frac{1}{168} + \frac{1}{120}} = \frac{24000}{\frac{1}{168} + \frac{1}{120}},$$

rezultă $p_x = 10\,000$ lei şi

$p_y = 14\,000$ lei.

Problema 888

Să se arate că dacă x, y, z, sunt numere diferite de zero, de acelaş semn şi avem egalităţile

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$y^2 + z^2 = x^2 + 1{,}2\,yz,$$

avem şi egalităţile:

$$xy = 0{,}48\,z^2$$

$$15\,x = 20\,y = 12\,z$$

C. Ionescu-Ţiu

Soluţie: Adunând cele două relaţii de condiţie obţinem

$$2y^2 = 1{,}2\,yz$$

Cum $y \neq 0$

$$y = 0{,}6\,z \qquad (1)$$

Introducând această valoare în una din relaţiile de condiţie găsim

$$x^2 = 0{,}64\,z^2$$

x,y,z fiind de acelaşi semn, avem

$$x = 0{,}8\,z \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) obţinem

$$xy = 0{,}48\,z^2$$

$$15\,x = 20\,y = 12\,z$$

Problema 889

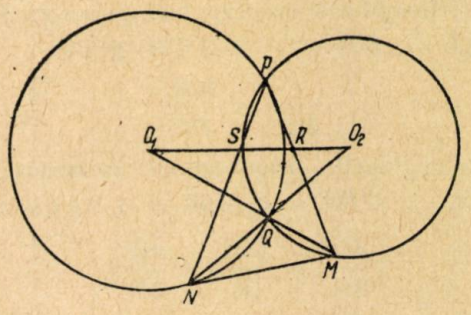
Fie P şi Q punctele de intersecţie a două cercuri O_1 şi O_2. Dreptele O_1Q şi O_2Q taie respectiv cercurile O_2 şi O_1 în punctele M şi N, iar dreptele MP şi NP taie linia centrelor respectiv în R şi S, Să se arate că:

1. *Bisectoarele triunghiului MNP sunt concurente în Q*
2. *Punctele M, N, O_1, P, O_2 sunt conciclice.*
3. *Triunghiul PRS este isoscel.*

Dumitru Arcanu
student, Bucureşti

Soluţie. 1. Avem

$$\sphericalangle QNO_1 = \sphericalangle NQO_1 = \sphericalangle O_2QM = \sphericalangle O_2MQ.$$



Patrulaterul MNO_1O_2 este deci inscriptibil. Rezultă

$$\sphericalangle QMN = \sphericalangle QO_1R = \sphericalangle PNQ = \frac{1}{2} \text{ măs. arc } PQ.$$

Analog $\sphericalangle QMN = \sphericalangle QMP$.
Rezultă că NQ şi MQ sunt bisectoare în triunghiul MNP.

2. Dela 1 rezultă

$$\sphericalangle QO_2M = \sphericalangle NO_1Q = \sphericalangle NPM;$$

$$\frac{1}{2} \sphericalangle NPM = \frac{1}{2} \text{ măs. arc } NQ = \frac{1}{2} \sphericalangle NO_1Q.$$

Rezultă că punctele M, N, O_1, O_2, P sunt conciclice.

3. PQ fiind bisectoarea unghiului SPR şi fiind perpendiculară pe O_1O_2, triunghiul PRS este isoscel.

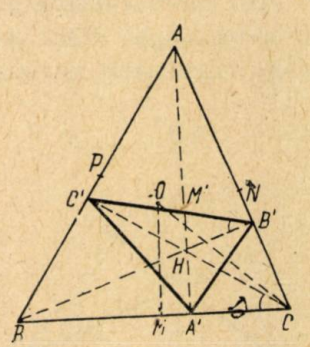
Problema 892

Intr-un cerc $O(R)$ se înscrie un triunghi oarecare ABC. Se duc înălţimile AA', BB', CC' care se taie în H. Fie r' raza cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$.

Să se arate că:

1. *Dacă triunghiul ABC este ascuţitunghi avem:*

$$4Rr' = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 8R^2 = 2\overline{AH} \cdot \overline{HA'}$$



2. *Dacă unghiul A este obtuz:*

$$4Rr' = \overline{HB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 8R^2 = 2\overline{HA} \cdot \overline{AA'}.$$

D. C. Panu

Soluție. 1. Fie M,N,P mijloacele laturilor BC, AC, AB. Fie HM' perpendiculara din H pe $B'C'$. Vom avea $HM' = r'$.

Din triunghiurile dreptunghice asemenea $HM'B'$ și $A'CH$ ($\sphericalangle HB'M' = \sphericalangle A'CH$) găsim:

$$\frac{r'}{HA'} = \frac{HB'}{HC}. \qquad (1)$$

Din triunghiurile dreptunghice asemenea HCB' și OMC ($\sphericalangle B'HC = \sphericalangle MOC = \sphericalangle A$) găsim:

$$\frac{\overline{HB'}}{HC} = \frac{\overline{OM}}{R} = \frac{\overline{AH}}{2R}. \qquad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă

$$4Rr' = 2\,\overline{AH} \cdot \overline{HA'}.$$

Pentru relația 2-a remarcăm că

$$\overline{AH} \cdot \overline{HA'} = \overline{BP}^2 - \overline{PH}^2 =$$

$$= \text{puterea lui } H \text{ față de cercul } ABA'B'.$$

Cum

$$\overline{AH} \cdot \overline{HA'} = \overline{BH} \cdot \overline{HB'} = \overline{CH} \cdot \overline{HC'}$$

avem

$$2\,\overline{AH} \cdot \overline{HA'} = \frac{2}{3}\left(\sum \frac{BC^2}{4} - \sum MA^2\right). \qquad (3)$$

Aplicând teorema medianei în triunghiurile HBC, HAC, HAB și adunând relațiile obținute găsim:

$$\sum \overline{HM}^2 = \sum \overline{HA}^2 - \frac{1}{4}\sum \overline{BC}^2.$$

Cum

$$\overline{HA} = 2\,\overline{OM}, \quad \overline{HB} = 2\,\overline{ON}, \quad \overline{HC} = 2 \cdot \overline{OP},$$

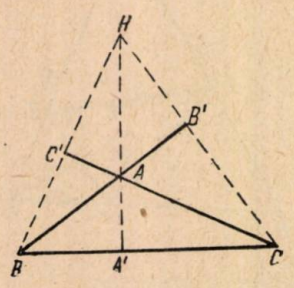
avem:

$$\overline{HA}^2 = 4R^2 - \overline{BC}^2, \text{ etc...}$$

$$\sum \overline{HA}^2 = 12\,R^2 - \sum \overline{BC}^2.$$

Inlocuind $\sum \overline{HN}^2$ și $\sum \overline{HA}^2$ cu valorile de mai sus în (3) obținem relația cerută.

2. Când $A > 90°$ aplicăm relația găsită mai sus în triunghiul ascuțitunghi HBC remarcând că raza cercului său circumscris este tot R întrucît



$$\sphericalangle BHC + \sphericalangle BAC = 180°,$$

obținem relația din enunț.

Problema 893

Fie AA', BB', CC' trei ceviene concurente în interiorul triunghiului oarecare ABC. Paralelele prin A' la AB și AC taie AC, AB în D și E; paralelele prin B' la AB și BC taie BC, AB în F și G; paralelele prin C' la AC și BC taie BC, AC în H și I. Punctele $M(DE; BC)$, $N(FG; AC)$, $P(HI; AB)$ sunt colineare. Cazuri particulare.

Marius Iosifescu

Soluție. Avem:

$$\frac{MB}{MA'} = \frac{ME}{MD} = \frac{MA'}{MC}, \text{ de unde}$$

$$\frac{MB}{MC} = \left(\frac{ME}{MD}\right)^2.$$

Insă

$$\frac{ME}{MD} = \frac{BE}{A'D} = \frac{BA'}{A'C}, \text{ deci } \frac{MB}{MC} = \left(\frac{BA'}{A'C}\right)^2.$$

Analog:

$$\frac{NA}{NC} = \left(\frac{AB'}{B'C}\right)^2 \text{ și } \frac{PA}{PB} = \left(\frac{AC'}{C'B}\right)^2.$$

Cevienele AA', BB', CC' fiind concurente avem

$$\left(\frac{A'B \cdot CB' \cdot C'A}{A'C \cdot AB' \cdot C'B}\right)^2 = 1$$

sau

$$\frac{MB \cdot NC \cdot PA}{MC \cdot NA \cdot PB} = +1$$

Punctele M,N,P sunt deci colineare.

Cazuri particulare. Când AA', BB', CC' sunt bisectoare, DE, FG și HI sunt mediatoarele segmentelor AA', BB', CC'.

Rezultă că într'un triunghiu oarecare mediatoarele bisectoarelor taie laturile corespunzătoare în trei puncte colineare.

Problema 900

Să se arate că oricare ar fi x *real, diferit de* $+1$ *și* -1, *avem*

$$\frac{x^7 - 1}{x^2(x-1)} - x > 2(x^2 + x + 1)$$

Să se arate pentru care valori ale lui x *în loc de inegalitate este egalitate.*

Zamfira Petrică
elevă, București

Soluție; Inegalitatea se poate scrie

$$(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - x^3 > 2x^3(x^2 + x + 1);$$

sau

$$x^6 + x^5 - x^4 - 2x^3 - x^2 + x + 1 > 0$$

și avem succesiv:

$$(x^3 - 1)^2 + x(x - 1)(x^3 - 1) > 0$$
$$(x^3 - 1)(x^3 - 1 + x^2 - x) > 0$$
$$(x^3 - 1)(x^2 - 1)(x + 1) > 0$$
$$(x^2 - 1)(x^2 + x + 1) > 0$$

Ultima inegalitate este evidentă. Inegalitatea se transformă în egalitate pentru $x = +1$ și $x = -1$.

PROBLEME PROPUSE[1]

1164. Care este viteza medie patratică a hidrogenului aflat la temperatura de 127°C? Care este masa moleculară a unui gaz aflat la aceeași temperatură, dar care are viteza medie patratică de 4,7 ori mai mică?

N. Stănescu

1165. Să se verifice identitatea:

$$\cos^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \sin^2 a \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 a \sin^2 b \cos^2 c + \cos^2 a \cos^2 b \sin^2 c + \cos^2 a \sin^2 b \sin^2 c + \sin^2 a \cos^2 b \sin^2 c + \sin^2 a \sin^2 b \cos^2 c + \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = 1.$$

N. Mihăileanu

1166. Să se arate dacă

$$x^2(x^4 + x - 4)^2 = 7 \pm 4\sqrt{3}$$

avem

$$x^{10} + 2x^7 - 8x^6 + 4x^5 + x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x + 1 = 0.$$

Reciproca este adevărată?

C. Ionescu-Țiu

1167. Începutul unei eclipse de lună a fost observat la ora 5 și 13 minute după ora locală a locului de observație; însă după calendarul astronomic, această eclipsă trebuie să înceapă la ora 3 și 51 minute după ora Greenwich. Care este longitudinea locului de observație?

* * *

1168. Să se calculeze presiunea maximă a unui vânt cu viteza 18 m/s asupra peretelui unei clădiri, presupunând că vântul suflă perpendicular pe perete. Să se exprime presiunea în mm coloană de mercur.

* * *

1169. Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$4x^2 - 9y^2 = 27$$
$$5x^2 - 7xz + 3z^2 = 5.$$

Ion Roșca
elev, București

1170. Să se arate că viteza sunetului într'un gaz ideal este numai o funcție a temperaturii și nu depinde de presiunea barometrică.

* * *

1171. Să se discute natura rădăcinilor ecuației:

$$(1 - 2m)\cos^2 x + (m + 5)\cos x + m = 0.$$

Simon St. Petre

1172. Să se explice dece într'o noapte cu lună, imaginea lunii se vede pe suprafața mării sub forma unei fâșii luminoase și nu sub forma unui disc.

— Să se explice dece două felinare identice aflate la distanțe diferite, dar mici, ne par adesea la fel de luminoase. Este oare aceasta adevărat și când se observă o abatere?

— Să se explice din ce cauză lumina care vine dela o sursă oarecare și care trece printr'un orificiu mic, dă o imagine a acelei surse pe un ecran așezat în spatele orificiului și dece se obține imaginea orificiului în cazul când lumina trece printr'un orificiu mare?

* * *

1173. Să se arate că:

$$\frac{\cos a - (1 + \sin a)\sqrt{3}}{\cos a - (1 - \sin a)\sqrt{3}} \cdot \frac{\sin(a + 30°)}{\sin(a - 30°)} + \frac{\cos a + (1 + \sin a)\sqrt{3}}{\cos a + (1 - \sin a)\sqrt{3}} = 0.$$

Maria Neumann

1174. Să se calculeze suma

$$S = a + \overline{ab} + \overline{aba} + \overline{abab} + \ldots + \overline{ab \ldots ab},$$

a și b fiind cifre, iar suma are $2n$ termeni.

Kiss Elemer

1175. Se dă ecuația

$$x^3 - (2 + m)x^2 + (3m - 4)x + 2m - 7 = 0$$

[1]) Soluțiile problemelor propuse în acest număr se primesc pînă la 1 august 1954.

ale cărei rădăcini x_1, x_2, x_3 sunt respectiv $\operatorname{tg} a$, $\operatorname{tg} b$, $\operatorname{tg} c$ şi se cere:

Să se afle $\operatorname{tg}(a+b+c)$; iar în cazul când $m=3$ să se afle unghiurile a, b, c.

Mircea Bocu
elev, Oradea

1176. Dece la unele tipuri de oculare se văd pete pe lentile, iar la alte tipuri, nu?

— O peliculă de săpun groasă de $d < \frac{\lambda}{10}$ va fi întunecată sau luminoasă în lumina reflectată? Pelicula se află în aer.

— Dece în centrul inelelor Newton care se observă în lumina reflectată este deobicei întunecat?

* * *

1177. Se dau două puncte fixe A şi B şi pe dreapta AB un punct variabil C. Un cerc cu centrul O trece prin A şi C, iar altul cu centrul O' trece prin B şi C. Cercurile O şi O' se intersectează a doua oară în punctul M. Ştiind că centrele O şi O' descriu respectiv, două drepte fixe Δ şi Δ_1 se cere:

a) Locul punctului M.

b) Să se arate că axul radical al cercurilor O şi O' trece printr'un punct fix.

Iosif Herşcovici
elev, Iaşi

1178. Fie M un punct în interiorul tetraedrului oarecare $A_1A_2A_3A_4$. Dreptele A_1M, A_2M, A_3M, A_4M intersectează feţele opuse respectiv în punctele B_1, B_2, B_3, B_4.

Să se stabilească relaţiile:

$$\sum \frac{MB_1}{A_1B_1} = 1 \quad \text{şi} \quad \sum \frac{A_1M}{A_1B_1} = 3.$$

Mihail I. Popescu
student, Bucureşti

1179. Să se stabilească relaţia:

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{1}{r_b^3} - \frac{1}{r_c^3} = \frac{12R}{S^2}$$

între elementele unui triunghi oarecare.

Marius Iosifescu
elev, Piteşti

1180. Care este conţinutul de energie moleculară (calorică) a unui mol de gaz aflat în condiţii normale de temperatură şi presiune?

N. Stănescu

1181. Intr'un triunghi ascuţitunghi ABC se proiectează mijlocul lui BC pe AC în E. Fie D piciorul înălţimii din A. Se notează $DE = a_1$ şi b_1, c_1 segmentele formate analog.

Să se arate că:

$$4\left(\frac{a_1^2}{\cos^2 C} + \frac{b_1^2}{\cos^2 A} + \frac{c_1^2}{\cos^2 B}\right) = 3\,(a^2+b^2+c^2).$$

Mircea Andreescu
elev, Bucureşti

1182. Ducem medianele AM, BN, CP într'un triunghi oarecare ABC. Din A, B, C ducem perpendicularele $AA'=AM$; $BB'=BM$ şi $CC'=CP$ respectiv pe cele trei mediane în acelaş sens de parcurs.

Să se arate că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea, cu acelaş centru de greutate G, iar raportul de asemănare $2:\sqrt{13}$.

Nicolae Pupăzan
elev, Predeal

1183. Să se rezolve ecuaţia:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin(a+x)}{\cos(a-x)}.$$

Matei I. Nazarie
elev, Bucureşti

1184. Dintr'un punct oarecare depe cercul înscris într'un patrat, diagonalele patratului se văd sub unghiurile x şi y. Să se stabilească relaţia: $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y = 8$.

Florin Torjescu
elev, Ploeşti

1185. Dacă într'un triunghi avem relaţia $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ să se arate că avem şi relaţia $2h_b = h_a + h_c$ şi reciproc; iar suprafaţa este dată de formula

$$S = \frac{b^2}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{A-C}{2}.$$

Marcel Cotariu

1186. Notăm cu a', b', c' laturile triunghiului format de picioarele înălţimilor unui triunghi oarecare de laturi a, b, c. Să se demonstreze relaţia:

$$(a'bc)^2 + (b'ca)^2 + (c'ab)^2 = (abc)^2 \pm 2\,abca'b'c'$$

semnul este $\pm$ după cum triunghiul ABC este ascuţitunghi sau obtuzunghi.

D. C. Panu

1187. Un obiect de 20 cm înălţime este aşezat la 90 cm în dreapta unei lentile subţiri divergente a cărei distanţă focală este de 30 cm.

In stânga acestei lentile se aşează o lentilă subţire convergentă cu o distanţă focală de 20 cm.

a) Care trebue să fie distanţa dintre cele două lentile pentruca imaginea obiectului, formată de sistemul celor două lentile să fie reală şi situată la 30 cm în dreapta lentilei convergente?

b) Care este mărimea imaginei?

Willy Paraschiv
student, Bucureşti

1188. Să se verifice relaţia:

$$\sum_{k=1}^{n} \sin (2k-1)\, x = \operatorname{tg} nx \sum_{k=1}^{n} \cos (2k-1)\, x.$$

C. Ionescu-Ţiu

1189. Să se rezolve sistemul de ecuaţii:

$$\sqrt{x^2+5x+2y-3} + \sqrt{x^2+x+y+2} = \sqrt{x^2+4x+3y-2} + \sqrt{x^2+2y+3}$$

$$x^{x-y} = 2y - 1.$$

I. Iavorski – Moscova

1190. Să se determine parametrul λ şi să se rezolve complect ecuaţia:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + \lambda x + \lambda + 2 = 0$$

ştiind că suma a două rădăcini este egală cu produsul celorlalte două.

Gh. D. Simionescu

1191. Se ştie că pentru a deosebi un ou crud de unul fiert (tare), el trebue învârtit pe masă. Oul tare se învârteşte mai mult timp pe când oul crud se opreşte îndată. Să se explice pe ce se bazează acest procedeu.

* * *

1192. Să se arate că nici unul din termenii şirului lui Fibonacci care este număr impar, nu este divizibil prin 17. (Se va consulta broşura apărută: «Numerele lui Fibonacci» tradusă din limba rusă).

* * *

EXERCIŢII PROPUSE PENTRU ŞCOALA DE 7 ANI

E: 411. – Să se verifice identitatea:

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{x(1-y)} + \frac{1}{y(1-x)} + \frac{1}{(1-x)(1-y)} = \frac{1}{xy(1-x)(1-y)}.$$

M. M.

E: 412. – Să se arate că:

$$a(b+y)(c-z) + b(c+z)(a-x) + c(a+x)(b-y) = a(b-y)(c+z) + b(c-z)(a+x) + c(a-x)(b+y)$$

C. I. Ţ.

E: 413. – Se consideră două puncte A şi B. Să se găsească numai cu compasul, punctul C situat în linie dreaptă cu A şi B astfel ca $AC = 5AB$.

Mihail I. Popescu
student, Bucureşti

E: 414. – Roata din faţă a unei trăsuri are diametrul de 0,90 metri, iar cea din spate are raza de 0,62 metri. Pe un drum, roţile au făcut împreună 4812 învârtituri. Câte învârtituri au făcut fiecare din ele şi care este lungimea drumului făcut?

* * *

E: 415. – Să se arate că:

$$x(a^3x - 3ab^2y)^2 + y(b^3y - 3ba^2x)^2 = (a^2x + b^2y)^3$$

$$a(ax^3 + 3bxy^2) - b(by^3 + 3ayx^2)^2 = (ax^2 - by^2)^3$$

* * *

E: 416. – Să se demonstreze că diferenţa între un număr de patru cifre consecutive şi răsturnatul său este 3087; iar diferenţa între un număr de cinci cifre consecutive şi răsturnatul său este numărul 41976.

Exemple: $8765 - 5678 = 3087$ şi $65432 - 23456 = 41976$.

* * *

E: 417. – Se duce cercul circumscris unui triunghi oarecare ABC şi notăm cu O centrul cercului. Înălţimile triunghiului se întâlnesc în punctul H numit ortocentru. Paralela din C la AO taie cercul în D. Să se arate că $BH = AD$.

G. Bercea

E: 418. – Să se verifice egalitatea:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \frac{2-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{31}{2}.$$

Gheorghe I. Stoian
elev, Târgovişte

E: 419. — Să se verifice identitatea:

$$(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)+x(1-y)(1-z)(1-t)+$$
$$+y(1-z)(1-t)(1-x)+z(1-t)(1-x)(1-y)+$$
$$+t(1-x)(1-y)(1-z)+xy(1-z)(1-t)+$$
$$+yz(1-t)(1-x)+zt(1-x)(1-y)+$$
$$+tx(1-y)(1-z)+xyz(1-t)+yzt(1-x)+$$
$$+ztx(1-y)+txy(1-z)+xyz=1$$

N. M.

E: 420. — Suma patratelor şi cuburilor a două numere întregi şi pozitive fiind 92, să se afle acele numere.

Gh. I. Bercea

E: 421. — Intr'un trapez oarecare $ABCD$, laturile paralele fiind AB şi CD, se ia un punct M pe latura AD. Paralela dusă prin A la MC taie latura BC în N. Să se arate că dreptele ND şi MB sunt paralele.

Nicolae Pandrea
elev, Focşani

E: 422. — Să se calculeze rezistenţa R a unui conductor de cupru de 2 mm, dacă el cântăreşte 16,470 kg. Să se afle intensitatea curentului de 110 volţi care trece prin acest conductor.

* * *

E: 423. — Să se calculeze diametrul unui conductor de cupru, pentru ca scăderea tensiunii pe lungimea de 1,5 km să fie egală cu 1,2 volţi la trecerea unui curent de 1,3 amperi.

* * *

E: 424. — Să se arate că:

$$\frac{(ab-1)^2}{(a^2-1)(b^2-1)}+\frac{(bc-1)^2}{(b^2-1)(c^2-1)}+\frac{(ca-1)^2}{(c^2-1)(a^2-1)}=$$
$$=1+2\frac{(ab-1)(bc-1)(ca-1)}{(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)}.$$

Să se mai arate că dacă în identitatea dată înlocuim semnele minus prin plus, obţinem tot o identitate.

C. I. Ţ.

PROBLEMELE PROPUSE [1] PENTRU „OLIMPIADA TINERILOR MATEMATICENI"

Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R. în dorinţa de a stimula activitatea la matematică a elevilor din clasele a V-a, a VI-a şi a VII-a de pe întinsul patriei noastre, a decis să se continue iniţiativa «Scânteii Pionierului» care a deschis în anul 1953 «Olimpiada Tinerilor Matematicieni».

«Olimpiada» se va desfăşura şi în acest an în două etape: prima etapă va dura între 1 martie şi 1 mai a.c., iar a doua etapă, între 1 mai şi 1 iulie a.c. Elevii vor lua cunoştinţă de problemele propuse pentru participanţii la «Olimpiadă» din publicaţia «Olimpiada Tinerilor Matematicieni 1954» care se va distribui gratuit în şcoli.

«Olimpiada Tinerilor Matematicieni» este condusă de tov. Acad. Prof. Univ. Grigore C. Moisil şi Prof. Univ. C. Ionescu—Bujor, Director General al Invăţământului elementar, mediu şi al educaţiei preşcolare din Ministerul Invăţământului..

Publicăm în acest număr, toate problemele propuse pentru clasa V-a şi unele probleme ale claselor a VI-a şi a VII-a. In numărul următor vom publica şi celelalte probleme ale claselor VI-a şi a VII-a.

Indemnăm pionierii şi şcolarii claselor a V-a, a VI-a şi a VII-a să participe cu tot avîntul lor, la această «Olimpiadă» organizată de Societatea de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., sprijinită de Ministerul Invăţământului şi Uniunea Tineretului Muncitor.

PROBLEMELE CLASEI A V-a

E: 425. Ce este mai mult, 15% din 36 sau 36% din 15?

Generalizare: Care din proprietăţile fundamentale ale operaţiilor intervin aici?

E: 426. Doi pionieri citesc aceiaşi carte. Dupăce primul a citit 165 pagini, iar cel de-al doilea, 225 pagini, se constată că primului i-au mai rămas de citit de cinci ori mai multe pagini decât celui de-al doilea. Cîte pagini are cartea?

E: 427. Două automobile pornesc din acelaş loc şi către aceiaşi destinaţie, unul în urma celuilalt la un interval de 3 ore. Primul merge cu o viteză de 48 km. pe oră, iar cel de-al doilea, cu 60 km pe oră, ajungând la destinaţie în acelaş moment. Care a fost distanţa parcursă?

[1] La E: 425 pînă la E: 446 se primesc soluţii pînă la 1 mai 1954.

E: 428. Prin calcule aritmetice, să se afle ce număr trebue pus în locul lui x pentru a avea egalitatea:

$$\left[\left(12\frac{1}{2}-2\right):\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{40}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(2+6\frac{2}{3}\right):\left(1\frac{5}{6}-1\frac{2}{3}\right)\right]:x=8.$$

E: 429. In clasele a V-a A şi a V-a B ale aceleiaşi şcoli, au fost în total 64 elevi. Trecînd 3 elevi din prima clasă în cealaltă, rămîne în prima clasă un efectiv cu 2 elevi în plus faţă de a doua. Cîţi elevi au fost la început în fiecare clasă?

E: 430. Un muncitor tipograf culege $2\frac{3}{16}$ pagini de text în $3\frac{1}{2}$ ore. După $1\frac{2}{5}$ ore dela începutul lucrului se alătură la lucru un alt tovarăş care culege $\frac{1}{2}$ pagină în 40 minute. La sfârşitul zilei se constată că fiecare a cules acelaş număr de pagini. Cîte pagini s'au cules în total?

E: 431. Intr'o echipă de săpători, un muncitor a săpat 3 m³, iar ceilalţi cîte 5 m³. Dacă fiecare ar fi săpat cîte 4 m³, ar fi rămas nesăpaţi 12 m³. Cîţi metri cubi s'au săpat în total?

E: 432. Intr'o gospodărie agricolă colectivă s'au însămînţat în prima zi 4/15 din întreaga suprafaţă; în a doua zi 5/8 din rest; în a treia zi, 7/9 din ce a mai rămas; în a patra zi, 4/5 din noul rest, iar în a cincea zi, $2^1/_2$ ha, terminîndu-se întreaga lucrare. Cîte hectare s'au însămînţat în fiecare zi?

E: 433. Trei autobuze pleacă dintr'o piaţă la ora 6 dimineaţa în trei direcţii şi se întorc în felul următor: primul peste o oră şi un sfert şi pleacă din nou după cinci minute pe acelaş traseu. Al doilea se întoarce după o oră şi 30 minute şi pleacă din nou după 6 minute; iar al treilea, se întoarce după o oră şi 52 minute şi pleacă din nou după 8 minute. La ce oră vor pleca din nou în acelaş timp din piaţă, cele trei autobuze?

PROBLEMELE CLASEI A VI-a

E: 434. Ce unghi formează acele unui ceasornic la ora 2 fără 10'?

E: 435. In clasă, profesorul cere elevilor să taie din carton, un triunghi isoscel în care o latură să fie de 12 cm, iar alta de 25 cm. In drum spre casă, doi elevi vorbesc despre problemă:

A: Nu ştiu cum să fac triunghiul, fiindcă nu ni s'a spus cît de mare trebue să fie latura a treia.

B: Atunci facem latura a treia ori de 12 cm ori de 25 cm.

A doua zi, la ora de Geometrie, se constantă că triunghiurile aduse de toţi elevii sunt egale. Este o întâmplare la mijloc?

E: 436. Două triunghiuri oarecare au câte o latură respectiv egale. Inălţimea şi mediana unui triunghi, care cad pe aceste laturi, sunt respectiv egale cu înălţimea şi mediana celuilalt triunghi. Putem afirma că aceste triunghiuri sunt egale?

E: 437. Cineva cumpără un obiect şi plăteşte în plus 15% din preţ pentrucă îl plăteşte în rate, — şi 10% din noul preţ pentru cheltuielile de ambalare, şi transport în oraşul respectiv. El crede că ar fi plătit mai puţin dacă i se adăuga mai întâi 10% — pentrucă plăteşte obiectul în rate — şi apoi 15% din noul preţ, pentru cheltuielile de expediţie. Care este adevărul? Să se generalizeze pentru cazul cînd preţul este P, prima majorare este a% şi a doua b%.

E: 438. Sfatul popular al unui oraş a repartizat suma de 159.000 lei pentru şcoală, căminul cultural şi spital. Fiecare din aceste instituţii îşi măreşte prin mijloace proprii, venitul şi anume: şcoala cu 10%, căminul cultural cu 8%, iar spitalul cu 5% şi astfel veniturile lor devin egale între ele. Ce sumă a dat sfatul popular fiecărei instituţii?

E: 439. Să se demonstreze că, dacă la un număr de două cifre adăugăm de 9 ori diferenţa dintre cifra unităţilor şi aceea a zecilor (atunci când cifra unităţilor este mai mare decât aceea a zecilor) obţinem un număr scris cu aceleaşi cifre, dar luate în ordine inversă. Cum trebue enunţată regula, atunci cînd cifra zecilor este mai mare decît cifra unităţilor?

E: 440. Alege un număr oarecare, scrie la dreapta lui cifra 7, scade din numărul astfel obţinut, de 9 ori numărul pe care ţi l-ai ales la început şi spune-mi cît ţi-a ieşit? Eu scad numărul 7 din acest număr şi îţi spun ce număr ţi-ai ales. Cum se poate?

E: 441. Lungimea unui dreptunghi este de 3 ori mai mare decît lățimea sa. Dacă mărim lungimea sa cu 4 cm și lățimea cu 6 cm, aria sa crește cu 108 cm^2. Se cer dimensiunile dreptunghiului.

PROBLEMELE CLASEI A VII-a

E: 442. Ce poziția are bisectoarea unghiului exterior dela vîrful unui triunghi isoscel față de baza triunghiului ?

Dispun de o linie gradată și de un echer. Cum pot construi cu aceste instrumente bisectoarea unui unghi dat?

E: 443. Laturile unui triunghi sunt $AB=5$ cm. $BC=6$ cm și $CA=7$ cm. Prin vîrful A se duce cîte o paralelă la bisectoarea unghiurilor B și C și se notează cu M și N punctele unde aceste paralele taie prelungirile bazei. Să se afle lungimea segmentului MN. Să se exprime rezultatul independent de datele numerice din problemă.

E: 444. Fiind date unghiurile A, B, C ale unui triunghi înscris într'un cerc, să se exprime unghiurile triunghiului ale cărui vîrfuri sunt punctele de intersecție ale înălțimilor triunghiului ABC cu cercul.

E: 445. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{2b^2 - 4abx - 2a^2}{x^2 - b^4} = \frac{a^2 + x}{b^2 - x} - \frac{a^2 - x}{b^2 + x}$$

și să se facă proba.

E: 446. La o cooperativă de desfacere s'au adus 2 transporturi de cherestea pentru suma totală de 1200 lei, — pe care le-a vîndut obținînd un beneficiu de 12%. Cît a costat fiecare transport dacă la primul s'a obținut un beneficiu de 7%, iar la al doilea, un beneficiu de 15%?

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții bune primite în luna Noembrie 1953

(urmare)

TIMIȘOARA. Școala Pedagogică, anul III. Marincu Aurelian (881, E: 306, 309, 317, 320, 322), Mettler Martin (927, 938, 972, 999, E: 305, Clasa X-a. Brașovan Ioan (843, 946, 1001, 1002, 1004, 1025, 1040, 1042, 1046, 1052, P).

TURNU MĂGURELE. Clasa IX-a. Țene C. Rodian (810, E: 279, 280, 285, 287, 289, 293, 294), Rey Vasile (780, 834, 846, 872, 873, 904, 916, 923, 938, 946, 950, 972, 973, 974, 975, 986, 993, 999, 1018, 1019, 1020, 1025, 1040, E: 286, 292, 294, 306, 335, 336, 172).

TURNU SEVERIN. Clasa IX-a. Stănuleț S. Mihai (768, 779, 787, 798, E: 252, 253, 257, 260, 261, 263, 266, 268, 269, 270, 271, 272, 279, 280, 281, 286), Clasa X-a. Răduț Marian (871, 872, 873, 875, 906, 923, 938, 950, 972, 992, E: 292, 312), Clasa XI-a. Filimon Ștefan (825, 837, 838, 839, 850, 865, 871, 872, 873, 874, 875, 878, 882, 906, 910, 912, 913, 915, 916, 917, 919, 925, 926, 927, 928, 930, 931, 934, 937, 938, 939, 940, 941, 942, E: 290, 291, 298), Istrășescu Vasile (871, 872, 873, 971, 972, 973, 974, 976, 994, 1000, E: 329), Olteanu Leonida (825, 881, 888, 904, 906, 908, 912, 915, 916, 931, 937, 939, 940, 942, 946, 950, 952, 966, 974, 1025), Pârjan D. Constantin (871, 872, 873, 971, 973, E: 318, 329), Pârvuleț A. Constantin (839, 850, 852, 871, 872, 873, 874, 875, 955, 999, 1000, 1002), Stoian Aurel (871, 872, 873, 973, 1000, E: 324, 329, 335).

TULCEA. Clasa X-a. Leonid Slavov (915, 950, E: 269, 303, 308).

VASLUI. Clasa IX-a. Stănescu I. Viorel (806, 938, E: 269, 275, 285, 289, 305, 306, 314, 317, 320, 322, 327, P), clasa X-a. Bostan G. Emil (788, 845, 881, 900, 910, 946, 950, 1000, 1001, 1029, 1033, 1042, 1040, 1044, 1046, 1047, 1050).

ZALĂU. Clasa X-a. Hodiș Gh. Gheorghe (867, 931, 972, 973, 974, P).

* * *

Dela 15 Noembrie 1953 la 15 Decembrie 1953 s'au primit soluții la cel puțin cinci probleme propuse în ultimele șase numere ale Revistei Matematice și Fizice, dela rezolvitorii la care sunt trecute numerele problemelor rezolvate, probleme propuse (P), articole (A) și note (N) după cum urmează:

ALBA-IULIA. Clasa X-a. Ioan Mihai (863, 871, 872, 904, 906, 907, 908, 910, E: 292, 293, 298, 304, 306, 308), Sina Iacob (871, 872, 873, 876, 904, 908, 916, 923, 938, 1033, 38, 42, 43, P). Școala de 7 ani, clasa VII-a. Mandel Robert (904, 905, 910, 914, 915, 916, 919, 925, 937, 939, E: 303).

ALEXANDRIA. Clasa IX-a. Ciampuru Stelian (816, 822, 835, 845, 871, 873, 904, 916, 928, E: 285, 293, 294, 298, 309, 310, 314, 332).

ARAD. Clasa XI-a. Vlaga Marius (835, 837, 838, 839, 840, 845, 850, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 881, E: 283, 384, 285, 286, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 298, 299, 300), Oniță St. Aurel (881, 907, 912, 913, 915, 916, 964, 971, 992, 1025); Școala Pedagogică de băeți, anul III, Gramă Dumitru (850, 871, 873, 875, E: 279, 280, 286, 290, 291), Leric Viorel (850, 871, 872, 873, E: 279, 280, 296, 292).

AIUD. Clasa VI-a. Vrăjitoru Mihai (290, 306, 330, 335, 337, 346, 353, 354, 358), clasa IX-a, Faur Ioan (819, 823, 904, 906, E: 297, 298), Vrăjitoru Dan (819, 839, 850, 865, 866, 882, 906, 909, 910, 911, 921, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 953, 962, 963, 964, 966, 971, 972, 973, 974, 975, 976, P); clasa XI-a, Cristea V. Horia (813, 819, 835, 879, 881, 923, 951), Ungur Doina (1040, 43, 53, 61, 65, E: 361, 368).

BACĂU. Clasa IX-a. Boghin Adrian (1064, 65, E: 358, 361, 362), Iorga Sergiu (841, 880, 1033, E: 303, 310, 312, 313, 320), Onofrei Grigore (905, 913, 925, 952, 1000, E: 306, 312, 321, 324, 358, 362), Subţirelu V. Gheorghe (E: 333, 337, 353, 358, 361, 365), Krauss Willy (887, 904, 906, 926, 930, 931, 938, 999, 1000, 1, 3, 33, 35, 38, 62, 65, 69, 78, 81); clasa X-a. Căpitanu Florin (952, 980, 1037, 40, 42, 44), Isar Radu (946, 950, 952, 1058, 65, 69, 78, 81, 82, E: 355, 362), Rosenfeld Sergiu (1042, 68, 69, 78, 92, E: 344, 349, 350, 358, 362); clasa XI-a. Tofan V. Ionel (946, 948, 950, 952, 953, 959, 962, 963, 966, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 978, 979, 980, 981, 984, 986, 988, 992, 993, 994, 996, 997, 998, 999, 1000, 1, 2, 3, 7, 25, 29, 30, 33, 37, 38, 40, 42, 44, P).

BAIA MARE. Clasa X-a. Mureşan Traian (871, 872, 873, 875, 876, 971, 972, 974, 975, 976, 992, 994, 997, 1000, 1, 40, 42, 68, 69, 78, 79, 81), Pop Gheorghe (948, 1029, 33, 38, 40, 42, 43, 44, 45, 65, 68, 69, 74, 78, 79, 81, 82, P).

BALŞ *(Regiunea Craiova)*. Clasa VIII-a. Petrulian I. Eufrosina (1033, 38, E: 292, 294, 305, 306, 313, 314, 335, 358, 361, 362).

BARLAD. David I Nela (1065, 70, E: 284, 285, 312).

BEIUŞ. Clasa X-a. Tomşa N. Marţian (950, 1025, 1068, 1069, E: 314, P).

BOTOŞANI. Şcoala medie tehnică de drumuri şi poduri. Anul I. Adumitroaiei Anişoara (873, E: 241, 305, 306, 335), Artimon Teodor (871, 873, E: 305, 306, 335), Avăduvii Maria (873, E: 241, 305, 306, 314), Băiceanu Gheorghe (871, 873, E: 286, 294, 321, 324, 355, 358, 381), Bojoi Natalia (873, E: 303, 305, 306, 358), Dumitriu M. Constantin (871, 873, E: 281, 286, 324, 328), Finaşcu Mihai (871, 873, E: 303, 311, 358), Hudescu Eugenia (916, E: 303, 311, 353, 358), Matei Ştefan (816, 871, 873, E: 306, 321,) Prăjinaru Vasile (871, 873, E: 283, 294, 303, 324, 358), Pincovici Morel (871, 873, 876, E: 290, 303, 318, 335, 358), Rădulescu Elena (873, E: 241, 305, 335, 353, 358), Rottenberg Martin (E: 266, 303, 306, 314, 358); anul III. Grigorincu Alexandrina (904, 923, E: 281, 305, 306, 321, 358, 358), Hucăl Mihai (904, 923, E: 305, 306, 314, 335), Hudescu Eugenia (838, 871, 873, 937, E: 266, 271), Afrasinei Maria (873, E: 266, 279, 305, 306, 314, 355), Bălan D. Alexandru (873, E: 305, 306, 321, 335), Bobolea Elena (873, 937, E: 279, 306, 335), Chelba Gheorghe (873, E: 306, 309, 321, 341), Furtună Gh. Teofil (873, E: 305, 306, 321, 335), Haginâ Pelaghia (873, E: 279, 305, 306, 335), Hurduc Minodora (871, 873, E: 266, 279, 309, 311, 321, 355), Iordăchescu Georgeta (913, 937, 972, E: 305, 306, 326, 335), Rottemberg Martin (871, 873, 876, E: 721, 292, 303, 305, 306, 309, 314, 316, 324, 335), Sofran Gheorghe (873, E: 305, 306, 321, 335), Velescu Marius (873, E: 305, 306, 321, 335), Zaim Maria (E: 303, 305, 306, 321, 329); anul IV. Curteanu Maria (910, 916, E: 292, 306, 335), Gasur Eva (838, 871, 876, 910, E: 271); *Şcoala Elementară, Bucecea*: clasa VII-a. Barbălat Ioan (E: 291, 310, 354, 355, 361), Ivan Dumitru (E: 353, 354, 355, 358, 361), Mihăilescu Cornelia (E: 290, 291, 305, 306, 309), Pârvu Nicolae (E: 290, 291, 306, 309, 337), Tofan Maria (E: 291, 310, 330, 337, 355, 361). Rosenţvaig Izu (841, 845, 895, E: 293, 294, 300, 304, 305, 304, 309, 311, 313, 314, 316, 358). Ciobanu Maria (898 E: 292, 306, 309, 335, 362, 364). Tarnovschi Şerban (884, 889, 910, 1062, E: 281, 302, 362, 364), Matei Florica (871, 872, 873, 973, E: 292, 306, 335), Pricop Georgeta (871, 873, 904, E: 308, 358). *Liceul de fete*. Clasa IX-a B. Vamanu Elena (1063, 81, E: 296, 339, 359, 362, P), clasa X-a. Casianov Eugenia (861, 901, 1038, E: 280, 335, 336), Patlog Rodica (834, 901, 1078, E: 349, 350, 351,) Rabinovici Rutica (946, 996, 1065, 68, 78, 81); Şcoala Medie Tehnică Textilă, anul II. Ionuţă Marioara (878, 946, E: 303, 305, 306, 312,) Acascovici Silviu (878, 946, E: 303, 305, 306, 312), Buliga Alexandru (946, E: 303, 305, 306, 314, 358), Bârsan Iulia (946, E: 303, 305, 306, 364, 365, 375, 378), Chirilă Maria (878, 946, E: 305, 306, 312, 349,) Rotaru Dan (878, 946, 1069, E: 304, 305, 306). *Liceul de băieţi*, clasa X-a. Ardeleanu C. (904, 935, 1078, 1079, E: 306, 309, 354, 358), Bălan Sergiu (910, 913, 923, 938, 1078, 79, 81, E: 270, 286, 305, 306, 312, 346, 362), Anăstăsoaie Vasile (904, E: 266, 270, 294, 306), Paul Grunberg (904, 910, E: 266, 270, 294, 300, 339, 355), Leahu Alexandru (838, 872, 873, 904, 908, 910, E: 286, 305, 306, 309), Mercheş Ioan (834, 901, 913, 938, E: 268, 270, 286, 305, 306, 309, 312, 313, 358, 362), Munteanu Adrian (863, 904, E: 281, 288, 306, 309), Sadici Vasile 841, 872, 873, 904, 910, 912, E: 281, 292, 294, 302, 305, 306, 310, 318), clasa XI-a. Butnaru Strul (838, 839, 871, 873, 876, 881, 915, 916, 937, 938, E: 290, 292, 294, 305, 310, 311), Clorotici Dorin (871, 878, 910, 914, 915, 916, 923, 1065, 68, 78, 81), Hue Florin (841, 863, 872, 873, 881, 904, 909, 915, 923, 927, 940, 942, 974, 1042, 65, 78, E: 306, 324, 358), Romeo I. Bitta (904, 908, 910, 1066, 68, E: 353, 358), Bughilă Theodor (876, 904, 905, 910, 911), Maxim C. Laurenţiu (838, 876, 881, 915, 972, 1068, E: 305, 309, 310, 358), Schor Bernard (881, 905, 940, 942, 1068, E: 305, 358).

BRĂILA. *Şcoala medie electrotehnică*. Anul III. Lungu Ştefan (982, 987, 999, 1000, 2, 4, 5, 41, 52, E: 320, 322, 325, 326, 328, 330, 331, 332, 335, 337, 338, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351).

BRANEŞTI (Regiunea Ploeşti) clasa VII-a. Fejer Gabriela (819, E: 317, 337, 344, 346, 351).

BUCUREŞTI. Liceul 1 fete. Clasa X-a. Belgrader Mariana (872, 910, 940, 972, 1000, 65, 68, 75, 79, 80, 81), Filimon Rodica (940, 874, 1025, 40, 78, 79, 80, 81, 82, 83, P); liceul 2-10-13. Clasa X-a. Gongea Valentina (834, 946, 1053, 68, 78, 81, E: 279, 280, 294, 312, 327, 341, 344, 349, 353, 358, 361, 362), Nicolescu Cornelia 808, (810, 814, 816, 822, 826, 824, 228 829, 830, 834, 838, 841, 842), Petrică Zamfira (870, 887, 888, 891, 893, 904, 907, 908, 909, 911, 916, 918, 919, 921, 923, 930, 931, 932, 935, 936, 945, 946, 950, 952, 966, 967, 972, 976, 993, 994, 995, 996, 1053, 61, 63, 67, 70, 79, 82, P), Roceric Maria (808, 878, 888, 901, 909, 929, 930, 938, 940, 942, E: 305, 308, 309, 312, 133, 314), Wechsler Henriette (875, 910, 911, 938, 946, 950, 1053, 68, 78, 81, 82, E: 292, 329, 344,) Ulmeanu Aurelia (1068, E: 318, 353, 356, 358, 361); *Liceul 1 băieţi*. Clasa VII-a. Popescu Călin (E: 337, 345, 347, 354, 358), Schileru I. Dinu (1028, 42, 53, 65, 68, 69, 70, P), clasa IX-a. Constantin Ion (845, 863, 871, 872, 873, 889, 904, 905, 913, 916, 937, 938), clasa X-a. Litinschi Mihai (951, 998, 1000, 40, 68, 69, 70, 78, E: 331, 339, 341, 344, 349, 350, 353, 355, 358, 395, 361, 362), Nicolae St. Alexandru (845, 851, 853, 858, 859, 880, 882, 887, 888, 889, 891, 892, 893, 896, 897, 900, 901), Marinescu Cătălin (1038, 68, 78, 79, 80, 81, 82, E: 343, 361), Miciţă P. Cristea (814, 834, 850, 871, 872, 873, 875, 971, 974, 1078), Zamfirescu Mihnea (1053, 54, 55, 61, 65, 68, 69, 78, 82,); clasa XI-a. Instinie C. Crăciunel (814, 878, 900, 902, 923, 927, 1022, 38, 61, 68, 69, E: 313, 349, 350, 358, P); Liceul 2 băeţi. Clasa VIII-a B. Duduica Radu (872, 900, 911, 930,

938, 972, 1078, 1081, E: 318, 355, 358, 360, 361, 362, 367), P); Liceul 3 băieți. Clasa VIII-a Ieremia Mircea (E: 323, 324, 335, 353, 358, 365); Liceul 4 băieți. Clasa VIII-a. Ghica Ioan (1084, E: 292, 341, 361, 281), Mirea Paul (1984, E: 329, 341, 3E:, 353, P). Liceul 5 băieți. Clasa IX-a. Berechet M. Oprea (827, 871, 872, 873, E: 286, 294); Liceul 6 băeți. Clasa VI-a. Nicolescu Miron (290, 311, 316, 318, 321, 353); Clasa IX-a. Popovici I. Radu (952, 1042, 68, 78, 81, 84, 98, E: 299, 323, 333, 339, 342, 344, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 361, 362, 369, 370, 373, 378, 380, 381, 382), Clasa X-a. Kestenband Barbu (845, 864, 867, 876, 1033, 35, 38, 43, 44, 55, E: 291, 301, 328, 329, 335, 358, 366). *Liceul 9 băieți.* Clasa XI-a. Chioveanu Emil (807, 813, 816, 819, 822, 823, 824, 825, 834, 835, 837, 388, 845), Răzuș Alexandru (800, 808, 813, 814, 816, 819, 822, 823, 824, 825, 834, 835, 837, 840, 863, 864, 895, 867, 871, 872, 873, 875, 876, 904, 906, 908, 912, 913, 915, 916, 919, 923, 927, 928, 929, 930). *Liceul 10 băieți « Aurel. Vlaicu »* Clasa X-a. Andreescu Gh. Radu. (828, 896, 920, 925, 963—1022, 23, 44, 48, 53, 73, — 78, 83), Roșca Ion (881, 887, 895, 900, 904, 938, 950, 1069, 76, 78), Seveșanu I. Mircea (960, 1076, 78, 79, 81),; clasa XI-a. Alexe M. Cornel (863, 866, 871, 873, 1078, 79, 81), *Școala elementară nr. 19.* Clasa VI. B. Stănescu N. Mioara (E: 337, 346, 353, 354, 366, 368); *Școala elementară Chitila.* Clasa VI-a. Dinu P. Coralia (871, 873, 876, E: 278, 290), Clasa VII-a. Chițimia M. Eustațiu (E: 276, 277, 279, 280, 281, 284, 285, 286, 289), Chiru Constantin (823, E: 277, 278, 279, 280, 286, 289, 291), Toader M. Gheorghe (823, E: 276, 277, 278, 279, 280, 281, 286, 289). *Școala de Radiotehnicieni.* Dumitrescu C. Pompiliu (E: 329, 335, 339, 344, 346), Ștefănescu E. (E: 318, 329, 339, 346, 377). *Școala medie tehnică Statistică.* Anul II. Vervari Viorica (E: 340, 341, 344, 358, 361), Popescu Mariana (E: 310, 340, 341, 358, 361).

Școala medie tehnică de metrologie. Anul II. Silberman Aurel (E: 292, 306, 314, 353, 358). *Școala medie tehnică de construcții.* Anul II. Rădulescu Aurel (1069, E: 354, 358, 364, 365). *Școala tehnică mecanică.* Anul I. A. Buzaș Stelian (E: 327, 329, 330, 332, 334), Crângașu Gheorghe (E: 327, 330, 332, 334, 335,) Gross David (E: 327, 329, 330, 332, 334, 335, 353, 354, 355, 357, 358, 360, 361, 368), Leibovici Radu (E: 327, 329, 330, 332, 334, 335), Mitroi Ion (E: 327, 329, 330, 332, 335), Pescaru Nicolae (E: 302, 303, 305, 306, 309, 311, 312, 314, 324, 335, 339, 341, 344, 346), Vlad Rada (E: 309, 324, 335, 346, 358), Scarpet Grigore (E: 324, 329, 335, 346, 358), Anul III. Neguț Gh. Nicolae (999, 1001, 35, 52, 68, 69, E: 352, 354, 357, 358, 359, 369 365). Anul I. B. Ioan Lucian (E: 356, 357, 358, 363, 365), Maftei Gheorghe (E: 341, 350, 353, 357, 361), Oprea Tănase (E: 353, 355, 357, 358, 361), Panait Martin (E: 353, 354, 355, 358, 359), Tănase Ion (E: 353, 355, 358, 360, 361), Marcu Stan (E: 305, 347, 353, 359, 360, 361, 365). *Școala medie tehnică de măsurători terestre.* Anul III. Moga Emil (904, 916, 923, 927, 929, 937, 938, 950, 974, 999, 1001, 68, 78, E: 304, 305, 306, 309, 312, 313, 314, 329, 332, 335, 358), Băli Vasile (873, 904, 906, 912, 915, 916, 923, 938, 940, 974, 993, 1065, 68, 69, 78, 79, 81, 82, E: 294, 313, 321, 323, 328, 329, 353, 354, 355, 358, 360, 361, 362), Tănase Dumitru (816, 831, 841, 847, 959, 960, 978, 1014, 30, 45, 45, 54, 55, 57, 58, 61, 63, 65, 67, 68, 69, 70, 72, 78, 79, 80, 81, 82, E: 321, 328, 342, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 365, 366, 368).

BUZĂU. *Liceul de fete.* Clasa IX-a. Dragoș Aura (871, 872, 904, 906, 913, 1033, E: 335, 358, 362), Ioniță Aurelia (871, 872, 873, 904, 1068, 69, E: 260, 266, 268, 304, 309, 353, 358); *Liceul de băieți.* Clasa IX-a. Potor Constantin (971, 972, 973, 974, 999, E: 315, 317, 318, 320, 322, 328, 331, 335, 337, 347, 358); clasa X-a. Popescu N. Ion (871, 873, 904, 906, 912, 913, 916, 923, 938, 950, 974, 976, 1068, 69, 78, 79, 81, E: 290, 292, 305, 306, 309, 339, 346, 349, 350, 351, 358, 361), Mihăescu C. Adrian (871, 872, 937, 938, 972, 974, 1068, 69, 78, E: 292, 344, 349, 350, 361), Sandu Eugen (904, 906, 916, 923, 938, 950, 974, 1010, 38, 68, 70, 79, 81, E: 317, 318, 341, 346, 358); clasa XI-a. Duțu Alexandru (909, 946, 972, 974, 984, 993, 1000, 25, 55, 78, 79, 81, 82), Stoicescu T. Dumitru (845, 869, 887, 900, 936, 948, 950, 853, 964, 971, 973, 974, 975, 976, 981, 992, 993, 998, 1023, 29, 33, 40, 42), Jarcău Aurel (946, 1038, 40, 42, 55, 65, 68, 69, 70, 78, 79, P). *Școala medie tehnică.* Anul III. A. Tudor T. Gheorghe (E: 287, 304, 318, 358, 365), Caporal Pănoiu Gr. Virgil (1068, 69, E: 353, 354, 356, 358, 359, 361, P).

CĂLĂRAȘI. *Școala medie tehnică de mecanizare agriculturii.* Petrovici Gheorghe (823, 838, 875, 878, 910, 940, 950, 999, E: 330, 346, 351, 353, 357, 358, 361, 368). *Liceul de băieți.* Clasa VIII-a. Nicolescu Dan (E: 279, 280, 281, 282, 283, 285, 335, 358); clasa IX-a. Vasilescu Aurel (800, 822, 863, 871, 872, 875, 876, 881, 904, 905, 911, 912, 916, 938, 940, 959, 964, 972, 988, 992, 999, 1000, 20, 25, E: 281, 285, 286, 329, 349).

CÂMPINA. Sondor Jivăleanu S. Gheorghe (940, 971, 1019, 81, E: 328, 335, 361, 362, 364, 365).

CODLEA. (Orașul Stalin). Absolventă Tofan Liliana (879, 888, 899, 900, 930, 939, 957, 986, 988, 989, 992, 993, 994, 996, 997, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 7, 18, 23, 28, E: 264, 284, 285, 288, 301, 308, 324, 325, 326, 327, 328, 389, 330, 335, 336).

CÂMPULUNG MUSCEL. *Școala medie tehnică de cărbuni.* Anul III. Savin Dan (879, 884, 1041, 78, 81, E: 306), Chirea Constantin (841, 904, 905, 906, 937); *Liceu,* clasa X-a. Irimie Carmen (814, 822, 834, 835, 978, 992, 1000, 14, 38, 62, 68, 79, 80, E: 288, 329, 336, 339, 358, 359, 362); Dancovici Gabriela (822, 992, 1038, E: 286, 288, 293, 339, 342); clasa XI-a. Șerban Ion (1065, 68, 69, 70, 79). *Școala pedagogică.* Brezoi Stănel (873 944, 974, 1007, E: 305, 306, 316), Duțu Gheorghe (E: 332, 345, 351, 353, 358, P).

CÂMPULUNG MOLDOVENESC. Școala *medie tehnică de construcții.* Anul III. Răileanu Gheorghe (808, 813, 916, 819, 823, 825, 837, 839, 841, 842, 845, 861, 863, 864, 868, 871, 872, 873, 875, 904, 905, 910, 912, 913, 915, 916, 917, 919, 926, 927, 937, 938, 940, 1005, 21).

CLUJ. *Liceul 2 fete.* Clasa VIII-a Costin Lucia (971, E: 336, 354, 355, 358, 361); *Liceul de băieți.* Clasa X-a. Constantinescu Florin (888, 910, 921, 1026, 68, E: 355), Bucurescu Mircea (808, 822, 823, 826, 834, 835, 839, 853, E: 285, 286, 288, 289, 290, 292, 293, 294, 295, 298, 300), Haiduc Ionel (813, 837, 845, 863, 872, 878, 907, 1000, 80,) Chiraf Ionel (E: 286, 312, 324, 334, 362); clasa XI-a. Lupaș Mircea (1033, 38, E: 314, 355, 367). *Școala specială de doi ani.* Miclăuș Tiberiu (834, E: 321, 323, 324, 355] 362), Cutuș Mihai (822, E: 355, 356, 358, 361, 362), Feneșan Ioan (E: 321, 324, 355, 356, 361, 362), Sfârlea Vasile (822, E: 321, 323, 324, 358, 361, 362), Soaită Viorel (E: 321, 323, 324, 355, 362), Szappanyos Mihai (822, E:

321, 323, 324, 358, 361, 363), Szentannay Arpad (E: 221, 323, 324, 355, 362).

CONSTANŢA. *Şcoala hidrotehnică.* Anul I. Ghencea Adrian (E: 306, 335, 346, 349, 358), Mandescu Constantin (E: 305, 306, 309, 314, 335, 346, 349, 350, 353, 354, 358), Mihai I. Dan (E: 305, 309, 346, 349, 354, 358), Vasiliv Lucia (E: 335, 340, 349, 350] 353, 354, 358), Lenghel Silvia (E: 304, 305, 306, 309, 335, 354); Anul II. Băcioiu Nicolae (872, E: 292, 324, 327, 335, 353, 354, 358, 361, 362), Duagi Axel (914, 915, 927, 938, 950, 972, 974, E: 290, 291, 292, 294, 305, 306, 312, 316, 320, 323, 324, 328, 329, 331, 335, 353, 354, 358, 361, 362). Alexandru Ştefan (950, 971, 972, 999, 1068, 97, E: 316, 321, 323, 324, 336, 344, 346, 353, 354, 357, 358, 360, 361, 362), Martinescu Ion (E: 305, 306, 309, 312, 329, 335, 353, 358, 362), Pascu Gheorghe (938, 1038, E: 223, 329, 335, 353, 354, 358, 361, 362), Stepan Ion (1025, 68, 79, E: 328, 329, 331, 337, 358, 361, 362, 363, 364, 365), Giumba Dumitru (E: 305, 306, 309, 312, 318, 323, 329, 336, 362, 353, 358), Triteanu Emilia (827, 1028, 63, E: 279, 292, 294, 305, 314, 339 258); clasa IX-a. *liceu.* Iordache Ion (977, 980, 988, 992, 999, 1000, 1, 5, 8, 12, 14, 29, 33, 35, 38, 42, 43, 44), Ionescu Ion (812, 823] 888, 906, 908, 913, 916, 923, 934, 938, 942, 946, 950, 972, 974, 1025, 33, 37, 38, 43, 68, 78, 79); clasa XI-a. Kümbetlian A. Garabet (1063, 65, 68, 69, 78, 79, 81, E: 356, 365, 358, P), Ciacîru Valentin (813, 823, 824, 834, 838, 389, 842, 845, 853, 867, 868, 876, 871, 872, 873, 876, 904, 906, 908). *Liceul de fete.* Clasa X-a. C. Pascu Mihaela (972, 1005, 78, 80, 81, E: 324, 349, 358, 362).

CORABIA. Clasa IX-a. Popa Gh. Stancu (1014, 38, 58, E: 304, 305, 306,309, 313, 327, 331, 335, 336, 342, 346, 351, 353, 358, 361, 362, P).

CRAIOVA. *Liceul 1 băeţi.* Clasa IX-a. Mihalache Gheorghe (1033, E: 314, 316, 324, 329); clasa X-a. Drăcea I. Constantin (915, 937, 1045, 65, 68, 69, E: 337, 344, 353, 354, 358, 365). clasa XI-a. Iliescu C. Florian (839, 871, 872, 873, 875, 876, 885, 906, 912, 923, 927, 928, 937, 938, 940, 1068, 69, 78, 79, 81, E: 292, 349, 355, 362), Scheli Evald (1042, 65, 70, 96, E: 353, 355, 358). *Liceul 2 băieţi.* Clasa XI-a. Radu Gh. Alexandru 1066, 68, 70, E: 339, 314, 353, 354, 361); clasa X-a. Guran A. Marius (1055, 65, 68, 78, 80, 81, E: 281, 286), Ene Gh. Apostol (842, 888, 889, 850, 852, 854, 1033, 38, 42, 43, 55, 58, 59, 62, 65, 68, 69, 78, 81), Cazanacli P. Nicolae (812, 824, 834, 888, 945, 968, 972, 974, 984, 988, 1025, 36, 42, 43, 53, 58, 59, 61, 62, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 78, 79, 80, 81, 82), Sufan T. Venus (900, 1055, 61, 65, 68, 69, 70, 78, 79, 80, 87), Sandu Titu (841, 900, 1040, 55, 61, 65, E: 279, 281, 282, 286, 300, 303, 305, 306, 324, 342, 344, 349, 380). *Şcoala medie tehnică c.f.r.* Anul II. Dicu D. Marin (865, 1068, 69, E: 358, 361, 363, 364, 365), Nedelcu Marin (1065, 70, E: 358, 364, 365), *Şcoala medie electrotehnică.* Anul II. Dinu Gheorghe (784, 794, 810, 841, 1038). *Şcoala medie tehnică metalurgică.* Anul IV. Constantin P. Marin (814, 822, 835, 874, 904, 1065, 69, 73, E: 277, 292, 293, 301, 305, 306, 309, 314, 344, 358, 365), Marin N. Gheorghe (878, 880, 881, 904, 905, 906, 907, 908).

CURTEA DE ARGEŞ. Clasa VIII-a. Prisiceanu Margareta (E: 304, 306, 312, 318, 321, 323, 324, 327), Bardor Marilena (E: 304, 306, 312, 318, 321, 323, 324, 327); clasa X-a. Florescu C. Constantin (904, 905, 912, 913, 916, 927, 938, 940, 951, 972, 973, 993, 999, 1000, 38, 43); student Miu Gh. Filipoiu (852, 881, 888, 907, 913, 916, 917, 931, 944, 951, 971, 972, 973, 978, 982, 984, 986, 998, 999, 1000, 2, 11, 16, 25, 40, 68, 82, P).

DEVA. *Şcoala pedagogică.* Anul III. Mârza Elena (1033, 38, 65, 68, 70); anul IV. Droica Constantin (1019, 33, 38, 65, 68, 69, 70, E: 318, 339, 346, 358).

DOROHOI. Clasa VIII-a. Catter Armand (E: 285, 289, 292, 298, 305, 306, 309, 335, 358, 363, 365); clasa XI-a. Eftimescu Nicolae (863, 872, 874, 911, 940, 1033, 38, 78, E: 319, 329, 336, 337, 338, 339, 342, 344, 347).

DRĂGĂŞANI. *Şcoala medie tehnică Voieşti.* Anul II. Copcea Ion (E: 305, 306, 311, 315, 337, 366, 368); Călina Ilie (E: 338, 357, 358, 362, 364, 365), Ciobanu Petre (E: 305, 306, 311, 335, 358, 356), Dascălău C. Mircea (823, 871, 873, E: 276, 277, 289, 290, 291, 295, 298, 306, 315, 322, 328, 335, 337, 346, 347, 359, 354, 358, 365, 368), Grecioiu Dumitru (E: 305, 306, 311, 315, 337, 346, 353, 357, 364, 365), Hodoroagă I. Gheorghe (E: 305, 306, 322, 331, 358, 365), Pescaru C. Vasile (E: 298, 305, 306, 312, 335, 337, 358), Manea I. Nicolae (822, 871, 873, 937, 1004, E: 277, 311, 335, 353, 354, 358, 363, 364, 365), Popa Ion (E: 311, 335, 354, 358, 365), Popescu Gh. Nicolae (E. 305, 306, 311, 318, 335). Popescu Gh. Toma (E: 305, 306, 318, 335, 358), Stelea Florea (904, 912, 973, 1004, E: 298, 311, 318, 331, 338, 353, 354, 356, 358, 363, 364), Stroe M. Lucian (E: 305, 306, 318, 335, 358), Tarcea C. Constantin (E: 305, 306, 315, 318, 337, 358), Toader V. Ion (E: 305, 311, 318, 335, 354, 358, 365); anul IV. Gavrilă Ioan (E: 305, 311 353, 357, 358).

FĂGĂRAŞ. Clasa X-a. Fernengel Eduard (946, 952, 953, E: 305, 306); slasa XI-a. Dragoman Ioan (842, 1038, 40, 68, 78, 81, E: 286, 290, 292, 294, 305, 306).

FOCŞANI. Baieră Bogdan (807, 813, 841, 875, 898, 925, 941, 942, 972, 974, 975, 1009, 11, 14, 18, 33, 35, 38, 63, 68, P), Damian Alexandru (814, 823, 834, 835, 871, 872, 1033, 63, 78, 79), Dorangă Constantin (871, 872, 873, 875, 876, 904, 913, 915, 937, 938, 940, 973), Donescu St. Dragomir (807, 808, 810, 814, 916, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 829, 831, 833, 834, 835, 837, 838, 839, 941 842, 844, 845, 846, 850, 853, 854, 858, 859, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 880, 881, 882, 887, 888, 889, 890, 892, 893, 901, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 918, 922, 923, 926, 927, 928, 930, 931, 933, 933, 934, 937, 938, 940, P), Dumitru V. Constantin (807, 813, 819, 871, 872, 873, 875, 882, 904, 905, 910, 913, 915, 916, 917, 923, 926, 927, 940, 944, 971, 972, 975, 986, 993, 1005, 14, 15), Hulea Ionel (819, 823, 853, 977, 1007, 40, 78, E: 281, 289, 358, 362, 265), Ianuc I. Corneliu (806, 813, 817, 834, 837, 841, 850, 863, 869, 871, 873, 874, 875, 878, 879, 912, 916, 925, 927, 938, 950, 989, 999, 1000 1, 4, 35, 40, 78, 79, E: 316, 317, 318, 320, 321, 322, 324, 365), Pandrea Nicolae (814, 822, 824, 831, 838, 841, 866, 867, 871, 876, 897, 917, 929, 934, 944, 959, 962, 963, 965, 975, 978, 980, 981, 982, 986, 988, 991, 992, 993, 994, 999, 1000, 1, 2, 13, 14, 18, 22, 25, 29, 30, 33, 35, 38, 40, 42, 43, 62, 65, 68, 69, 78, 79, 81, 82, P), Scurtu Gheorghe (872, 875, 876, 904, 913, 915, 917, 923, 937, 938, 940, 971, 972, 973, 974), Stăncic Octavian (813, 819, 835, 1042, E: 285, 286, 287, 289, 292, 294, 306, 309, 342, 346, 349, 358, 361, 362, 363, 364, 365), Zaharia Gh. (819, 823, 871, 873, 904, 913, 923, 975, 1065); clasa XI-a. Petrovici Radu (809, 881, 883, 1033, 1038, 1040, 48, P), Viorel Mircea (841, 904, 1033, E: 306, 318, 342, 358), Ivaner Lică (897, 1033, 38, 40, E: 305, 306, 342, 351, 362), Popoiu Alecu (813, 814, 819, 823, 834, 835, 841, 872, 873, 875, 904, 905, 907, 952, 967, 972, 974, 975, 1038, E: 281, 286, 292, 323, 324).

GALAŢI. *Şcoala medie de marină.* Clasa IX-a. Rodittis Ion (1040, E: 329, 343, 344, 346, 349, 350); clasa X-a. Dermengea Milică (878, 882, 904, 928, 942, 944); clasa XI-a. Chesana Cornelia (808, 814, 827, 833, 834, E: 279, 280, 281, 286, 287, 288, 282), Dabija Sorin (839, 852, 866, 867, 868, 870, 874, 875, 876, 878, 880, 881, 882, 887, 888, 889, 891, 892, 894, 895, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921).

GHEORGHENI. Clasa X-a. Cilinghir Vladimir (954, 994, 1025, 42, E: 329, 332, 335, 339).

GIURGIU. Clasa VII-a. Cârjaliu N. Marin (E: 301, 306, 307, 308, 309, 310, 315, 316, 317, 322); clasa IX-a. Dumitrescu V. Ion (950, 976, E: 290, 292, 294, 306, 309), Petcu Florian (1068, 69, E: 337, 351, 352, 353, 358, 364, 365), Sfetcu Florian (850, 873, 888, E: 304, 305, 306, 308, 309, 396); clasa X-a. Bătineţu M. Dumitru (808, 810, 812, 833, 846, 852, 853, 855, 865, 866, 870, 871, 874, 875), Stanciu Mirel (835, 838, 882, 982, 988, P); clasa XI-a. Fotă M. Stan (814, 841, 889, 896, 913, 915, 934, 951, 952, 963, 968, 993, 994, 1030, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 48, 58, 63, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 78, 79, 80, 81, 82, P), Petcu I. Dumitru (836, 852, 853, 854, 859, 864, 883, 984, 988, 989, 993, 994, 1018, 19, 23, 30, 31, 32, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 50, 52, 55, 62, 65, 68, 69, 70, 73, 76, 78, 79, 80, 81), Vişan V. Marin (823, 833, 842, 850, 873, 815, 944, 948, 949, 950, 951, 952, 958, 964, 971, 972, 973, 974, 975, 976, E: 277, 285). *Şcoala medie tehnică de mecanizarea agriculturii.* Anul II. Panti Gheorghe (912, 916, 937, 939, 973, 1025, E: 311, 318, 336, 337, 358, 359); anul III. Negoi M. Ion (871, 873, 905, 916, 973, E: 300, 305, 353, 358, 379), Ştefănescu Marin (934, 986, 1068, 69, E: 353, 358, 316, 368), absolvent Dănilă Gheorghe (853, 850, 865, 866, 867, 880, 884, 888, 895, 901, 904, 906, 909, 911, 914, 916, 926, 927, 928, 942, 943, 957, 959, 964, 965, 968, 984, 988, 992, 993, 996, 1005, 14).

HUNEDOARA. *Şcoala medie tehnică metalurgică.* Absolvent Gheorghe Valer (1069, 70, E: 327, 352, 353, 356, 357, 358, 361, 362, 363, 364, 365, 368).

IAŞI. Clasa X-a. Ungureanu Ştefan (807, 810, 813, 814, 816, 819, 823, 826, 831, 833, 834, 856, 871, 872, 873), Herşcovici Iosif (808, 810, 814, 816, 826, 834, 841, 842, 863, 871, 872, 873, 875, 889, 904, 906, 908, 910, 912, 913, 923, 938, 946, 950, 952, 959, 962, 963, 973, 980, 992, 999, 1000, 12, 14, 28, 33, 35, 38, 43, 57, 58, 62, 63, 68, 78, 79, 80, 82, 83), Arsintescu Virgil (807, 810, 816, 817, 834, 835, 837, 838, 839, 860, 863, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 879, 882, 904, 905, 908, 910, E: 276, 279, 280, 281, 284, 285, 286, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 298, 299, 300), David Carol (1020, 40, 53, 55, 57, 69), Geambaşu Lică (807, 808, 810, 811, 812, 813, 814, 816, 819, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 831, 834, P), Ştefan Alexandru (807, 808, 810, 811, 812, 813, 814, 816, 819, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 929, 831, 833, 834, 835, P), Vaisman Izu (807, 808, 810, 813, 814, 816, 819, 822, 823, 825, 826, 827, 829, 831, 834, 835, P); clasa VIII-a. *Liceul de băieţi.* Corduneanu Adrian (1053, 55, 62, 68, 80, 81); *Şcoala Pedagogică* anul I. Bulai Vasile (E: 292, 294, 298, 335, 337, 346, 347, 351, 354, 358, 361, 365), Corduneanu Nicolae (E: 292, 298, 351, 354, 355, 358), Golovan Ion (E: 335, 354, 361, 365, 368), Dobrea Constantin (E: 335, 354, 355, 361, 365), Tulbure C. (E: 285, 289, 306, 335, 346, 347, 351, 354, 365, 368), Crăcană Petru (E: 290, 298, 328, 335, 346, 347, 351, 354, 368), Dorneanu Arsenie (E: 298, 337, 346, 351, 354); anul III. Căruntu Nicolae (878, 904, E: 305, 306, 309, 353, 354, 355), Radu Constantin (E: 292, 327, 328, 346, 347, 357, 358, 361), Tănase Adam (871, 875, 1069, E: 326, 328, 347, 348, 354, 357, 358, 361, 362); *Şcoala medie electrotehnică.* Anul I. Tanianovschi Iovan (E: 338, 353, 354, 358, 361, 362, 364, 365, 368), Mihalopulos Spiros (E: 337, 345, 346, 362, 364, 365), Paladian Nicolae (E: 353, 354, 355, 362, 364), Iordăchescu Florin (E: 338, 341, 349, 353, 354, 358, 361, 362, 364, 365, 368).

LUGOJ. Clasa XI-a. Vidoni Simion (834, 835, 871, 872, 873, 923, 950, 964, 968, 1020, 22, 25, 26, E: 292, 306, 323, 329, 336).

OCNA MUREŞULUI. Clasa VIII-a. Duca Vasile (E: 292, 294, 305, 306, 309, 324, 335, 341, 344, 316), Mârza Mircea (E: 294, 305, 309, 324, 335, 358, 361).

ORADEA. Clasa VIII-a. Doina Iosif (916, 973, 974, 976, E: 296, 310, 312, 316, 318, 320, 321, 323, 326, 327, 328, 330, 331, 332, 334); clasa IX-a. Pavel Gh. Adrian (888, 906, 972, 1069, E: 294, 300, 305, 308, 335, 341, 349 350), Rus A Ion (816, 822, 824, 827, 834, 850, 852, 859, 879, 964, 980, 1000, 1, 42, 55, 68, 69, 70, E: 296, P), Vicaş T. Corneliu (816, 825, 827, 974, E: 276, 277, 281, 290, 291, 294, 295, 296, 297, 300, 304, 306, 307, 311, 312, 324, 331, 341, 356, 357, 358, 361, 366, P), Anonim clasa IX-a. C. (841, 906, 1039, 70, E: 285, 286, 287, 292, 298, 304, 305, 315, 317, 318, 344, 361); clasa X-a. Buzuloiu Vasile (897, 900—941), (43 probleme).

ORAŞUL STALIN. Clasa VIII-a. Ciobanu I. (E: 257, 306, 311, 314, 335, 344), Minea Florin (E 281, 286, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 300 303, 304, 305, 306, 309, 311, 314); clasa X-a. Butencu Igor (849, 850, 901, 906, 910, 923, 927, 931, 938, 938, 940, 950, 994, 998, 1002, 23, 25, 40, 42, 68, 73, 78, 81, E: 293, 294, 306, 329, 335), Garcea Militan (950, 873, 1068, E: 292, 294, 303, 305, 306, 329), Ionescu D. Radu (863, 873, 878, 888, 897, 904, 912, 913, 923, 938, 839, 940, 942, 974); clasa XI-a. Nan Stelian (823, 838, 839, 864, 867, 868, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 882, 885, 901, 904, 905, 906, 908, 909, 913, 923, 927, 938, 940, 992, 998, 999, 1000, 11, 25, 37, 38, 40, 42, 55, 68, 73, 78, 79, 80, 81, E: 277, 281, 285, 286, 289, 291, 292, 293, 294, 298).

PIATRA NEAMŢ. Clasa VIII-a. Apopei Rodica (863, 913, 925, E: 305, 306, 309, 329, 335), Găbăţeanu Sidonia (838, 871, 904, 913, 925, E: 294, 306, 309, 324, 335); clasa IX-a. Măgdaş Sanda (E: 303, 304, 316, 321, 322, 324, 327, 329, 335, 336, 339, 349, 353, 358), Pricop Gabriela (904, 912, 913, 952, 937, 938, 973), Rusu Monica (E: 292, 294, 312, 324, 329, 336, 338), Zifui Zenobia (906, 1038, E: 321, 324, 336, 339), Corduneanu Maria (1033, E: 304, 311, 312, 316, 324, 327, 353, 354, 362), Călianu Narcisa (904, 906, 907, 908, 929, 1033, 37, 38, 42, 65, 68, 79, E: 292, 305, 309), Rapoţică Aurelia (871, 872, 873, 906, 1033, E: 327, 336, 353, 357); clasa X-a. Baruch Sofia (908, 923, 1033, 38, 40, E: 349, 350), Ciocodan Vasile (813, 819, 822, 1071, E: 285, 289, 292, 294), Byola Adrian (818, 819, 823, 839, 851, E: 276, 277, 282, 285, 286, 289, 298, 301, 355, 362, 264), Coşter Clara (710, 1033, 38, E: 324, 342, 358, 362), Apostolatu Toia (838, 872, 873, 972, 1033, 38, 40, 43, 58, E: 358, 362), Lazăr Edith (872, 904, 905, 906, 910, E: 339, 342, 362), Minuţ M. Petru (810, 813, 816, 825, 841, 845, 853, 863, 864, 874, 878, 883, 905, 908, 912, 915, 916, 923, 927, 931, 937, 944, 950, 952, 971, 972, 974, 980, 982, 986, 988, 999, 1001, 53, 65, 68, 78, 81, E: 276, 277, 278, 279, 281, 284, 285, 286, 289, 302, 303, 304, 305,

308, 309, 310, 317, 320), Savinescu Florica (E: 292, 294, 305, 306, 309, 324, 349), Macovei Ioan (878, 904, 905, 907, 912, 913, 914, 915, 916, 927, 928, 938, 1060, 65, E: 352, 353, 354, 357, 358, 362, 365, 368); clasa XI-a. Pristavu Ioan (871, 872, 873, 876, 878, 888, 897, 904, 908, 915, 916, 923, 927, 937, 938, 940, 945, 946, 950, 971, 974, 986, 988, 999, 1000, 1, 12, 30, 38, 40, 43, 54, 55, 57, 59, 65, 67, 68, 69); *Școala de 7 ani Roznov.* Clasa VI-a. Hodor Constantin (E: 337, 345, 346, 354, 368).

PITEȘTI. Clasa VIII-a. Ștefănescu I. Gheorghe (E: 279, 280, 305, 306, 335, 341, 358); clasa IX-a. Gulie I. Nicolae (871, 872, 873, 1069, 78, 84, E: 292, 295, 336, 344, 358, 362), Șerb G. Gabriel (952, 955, 957, 960, 964, 966, 971, 972, 973, 974, 976), Udrescu St. Emil (834, 906, E: 292, 306, 312, 314, 318, 320, 322, 323, 331, 335, 344, 346, 347, 358, 362); clasa X-a. Saraci Dumitru (838, 839, 845, 852, 861, 863, 864, 865, 866, 871, 872, 873, 875, 876, 904, 912, 914, 919, 923, 938, 978, E: 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 283, 284, 285, 287, 288, 290, 291, 292, 293, 294, 296, 297, 298, 299, 300, 305, 307, 314, 316, 318, 324, 337, 344, 346, 349, 360, 361, 362, 364, 365); *Școala medie tehnică mecanică.* Mihai St. Constantin (819, 1018, E: 276, 279, 286, 298, 301), *Școala de 7 ani, Petroșani. (Pitești).* Clasa VII-a. Oproiu Camil (E: 279, 280, 290, 291, 292, 293, 294, 300, 303, 304, 305, 306, 308, 309, 310, 312, 313, 324, 347.

PLOEȘTI. *Liceul «I. L. Caragiale».* Clasa VIII-a. Anghelescu P. Alexandru (279, 280, 302, 304, 305, 306, 309, 311, 324, 327, 330, 331, 335, 341, 346, 349, 354, 361), Dinu Constantin (307, 310, 317, 320, 325, 353, 354, 357, 364); clasa IX-a. Soare D. Ioan (999, E: 322, 328, 331, 332, 335, 346); clasa X-a. Popescu C. Nicolae (1053, 65, 68, 69, 73, 78, 81), Horoiu Dan (1033, 35, 37, 38, 40, 43); clasa XI-a. Dogaru T. Mihai (807, 810, 813, 816, 817, 818, 819, 821, 822 823, 824, 825, 826, 831, 834, 837, 838, 839, 841, 842, 845, 850, 852, 853, 856, 857, 858, 861, 871, 872, 873, 874, 875, 876), Dăscălescu Gheorghe (888, 897, 910 916, 945, 950, 952, 956, 963, 967, 968, 969, 977, 979, 987,) Pușcașu A. Alexandru (856, 858, 859, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 880, 882, 891, 900), Silon Dinu (819, 831, 834, 845, 898), Vulpescu Dumitru (878, 881, 882, 884, 885, 891, 904, 909, 910, 912, 913, 916, 917, 923, 925, 926, 927, 928, 931, 937, 938, 940, 941, 952, 954, 966, 971, 973, 974, 975, 994, 1000, 24 61, 65, 68, 78, 81, P), Torjescu S. Florin (943, 959, 962, 981, 984, 986, 987, 988, 1005, P); *Liceul de fete.* Clasa X-a. Constantinescu Rodica (756, 798, 835, 845, 1028), Ionescu Margareta (883, 952, 973, E: 324, 327, 329, 335, 353, 361); clala XI-a. Marinescu Adriana (950, 1025, 35, 65, 68, 69, 70, 78, 79, 81); *Școala medie tehnică de petrol.* Anul III. Vlăsceanu Dumitru (817, 823, 825, 835, 871 873, 874, 879, 904, E: 289, 290, 306), Bobeică I. Dumitru (813, 825, 835, 846, 847, 852, 853, 854, 925, 931, 944, 950, 951, 956, 972, 973, 975, 976, 988, 1001, 2, 3, 4, 5); clasa VI-a. din *Bezdead.* Paraschiv Elena (E: 309, 344, 361, 365, 368).

PREDEAL. *Școala medie «Dimitrie Cantemir».* Clasa XI-a. Alexa Ioan (808, 809, 810, 812, 815, 823-826, 829, 830, 833, 834, 835, 837-842, 846, 848, 850, 852, 853, 854, 859, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 869, 870, 871, 873, 874, 875, 876, E: 276, 277 279, 280, 281, 283, 285, 286, 288, 290-294, 296, 297, 298, 300), Alexandru Gheorghe (819, 822, 831, 834, 841, 843, 853, 913, 923, 962, 1025, 33, 38, 43), Apostu I. Gheorghe (808, 809, 810, 812, 814, 815, 819, 822, 823, 825, 823, 826, 827, 833, 834, 835, 837, 838, 839, 940, 841, 842, 845, 848, 850, 853, 864, 867, 871, 872, 873, 874, 875, 876), Budin I. Constantin (810, 814, 815, 819, 823, 824, 829, 878, 880, 888, 895, 900, 904, 905, 907, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 197, 919, 921, 922, 923, 926, 927, 928, 929, 931, 937, 938, 939, 940, 944, 947, 999, 1000, 4, 5, 18, 19, 20, 24), Coman Gheorghe (810, 813, 819, 823, 824, 826, 827, 829, 830, 831, 833, 835, 839, 852, 853, 850, 814, 850, 861, 863, E: 270, 281, 286, 288, 289, 290, 291, 294, 298), Duțu Gheorghe (812, 813, 819, 822, 824, 826, 827, 828, 830, 831, 835, 839, 841, 943, 850, 853, 867, 970, 971, 1038, E: 279, 280, 285, 286, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 298, 293, 300, 318), Hustiuc Nicolae (808, 810, 813, 816, 819, 824, 826, 829, 834, 835, 836, 838, 839, 841, 842, 848, 850, 851, 861, 863, 864, 866, 867, 868, 871, 872, 873, 875, 876, E: 276, 277, 279, 283, 285, 286, 288, 289, 290, 291, 293, 294, 296, 298), Săsărman Ioan (808, 809, 810, 812, 813, 814, 816, 819, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 829, 830, 833, 834, 835, 837, 838, 840, 841, 842, 845, 846, 850, 848, 855, 858, 859, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 870, 871, 872, 873, 874, 875, E: 276, 278, 279, 280, 281, 283, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 300), Victor V. Stainberg (808, 810, 812, 813, 814, 819, 824, 826, 827, 829, 830, 831, 834, 835, 939, 841, 842, 845, 848, 850, 853, 856, 870, 872, E: 277, 279, 280, 281, 285, 286, 289, 290, 293, 295, 297, 298, 300), Torsan Ilie (813, 819, 822, 823, 824, 826, 827, 830, 831, 833, 834, 835, 839, 840, 841, 842, 845, 848, 858, 860, 867, 868, 871, 872, 873, 786, E: 277, 279, 280, 281, 285, 286, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 298, 300), Ută G. Marin (810, 814, 815, 824, 827, 829, 830, 837, 842, 993, 994, 996, 998, 1004, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 29, 30).

(va urma)

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebue făcută separat cu aplicațiile necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme pe aceiași foaie, iar fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei și enunțul complect. După soluționarea problemei scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați și trimiteți problemele așezate în ordinea lor numerică.

— *Se mai primesc soluții* numai la problemele cu numărul de ordine 1035 și următoarele, iar pentru exercițiile elementare, dela E: 350 și următoarele, adică, din ultimele cinci numere din R.M.F. Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în cursul anului 1954, se vor socoti la premierea pe anul 1954.

★

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor să se facă odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica.

— Fiecare cetitor al R.M.F. este rugat a face cunoscută revista și altor cunoscuți, pentru a mări astfel, numărul colaboratorilor.

— Reclamațiile de neprimirea R.M.F. sau cereri de numere vechi, se pot face Oficiului Special de Expediere a Presei, din București, str. Constantin Mille Nr. 14, telefon 5-28-90.

— Problemele rezolvate, propuse, note matematice și fizice, articole, dări de seamă asupra activității cercurilor de matematică și fizică pentru elevi, cereri, sugestii și propuneri, etc. se trimit pe adresa: *REVISTA MATEMATICĂ ȘI FIZICĂ*, Str. Dionisie Lupu, nr. 40 raionul Stalin București.

ABONAMENTELE PE ANUL 1954

se fac prin oficiile poştale, prin factorii poştali, prin difuzorii voluntari şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru profesori, muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 1949. — INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREŞTI

Lei 1.—

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

E 1426

KAT

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
ОБМЕН ... ERE
VYME... WYMIANA
TAUSCH - OMEHA

ANUL V

15 MARTIE 1954

3

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*Săptămîna mondială a tineretului*	57
2.	*Premiile «Revistei Matematice şi Fizice» pe anul 1953*	58
3.	*Despre momentele de inerţie de Prof. Univ. N. Bărbulescu*	60
4.	*Să construim cu mijloace proprii modele şi aparate de fizică*	68
5.	*Probleme — experienţe — întrebări. Clasa VI—X*	70
6.	*Probleme rezolvate (821, 825, 857, 858, 859, 863, 889, 894, 895, 897, 904, 908, 909, 912, 916, 918, 920, 924)*	73
7.	*Probleme propuse (1193—1213)*	78
8.	*Exerciţii şi probleme propuse pentru şcoala de şapte ani (E: 447—E: 456)*	80
9.	*Poşta redacţiei*	81
10.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	82

ANUL V — 3 — MARTIE 1954

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Apare lunar sub îngrijirea unui secretariat de redacţie

REDACŢIA; Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti

Articolele, notele, recenzile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus.

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul V, Nr. 3 **Martie 1954**

FILIALA BONA

SĂPTĂMÎNA MONDIALĂ A TINERETULUI

In fiecare an, între 21 şi 28 martie, în prima săptămînă a primăverii, conform unei tradiţii adînc înrădăcinate, tineretul democrat din lumea întreagă sărbătoreşte Săptămîna Mondială a Tineretului. In acest an sărbătorirea se desfăşoară sub semnul intensificării necontenite a luptei popoarelor pentru pace, pentru asigurarea unei vieţi fericite.

Sute de mii de tineri au căzut în sîngeroasa şi aventuroasa campanie de jaf şi cotropire pe care imperialiştii au desfăşurat-o în Coreea şi alte sute de mii luptă în Vietnam şi Malaya. Iată deci, pentruce milioane şi milioane de tineri de pe toate continentele şi din toate ţările îşi sporesc eforturile pentru apărarea păcii. Tineretul lumii este vital interesat de încheierea unui Pact al Păcii între cele cinci mari puteri şi îşi îndreaptă cu recunoştinţă privirile spre Uniunea Sovietică, care prin propunerile făcute la conferinţa dela Berlin, dovedeşte încă odată mai mult a fi stegarul păcii şi luptătoare consecventă pentru împiedicarea unui nou război.

Spre deosebire de tineretul din ţările lagărului păcii, democraţiei şi socialismului care poate să se bucure de o viaţă luminoasă, plină de bucuria de a-şi consacra elanul tineresc planurilor grandioase de construcţie paşnică, tineretul din celelalte ţări, înglobate în lagărul imperialist şi antidemocratic este lipsit de condiţiile necesare ale unei vieţi libere cetăţeneşti, este lipsit de drepturi, este aruncat în închisori cînd îndrăzneşte să se ridice împotriva asupritorilor. Situaţia tineretului din ţările capitaliste este încă şi mai agravată de politica de militarizare a acestor ţări, de cursa înarmărilor, de războaiele pe care le duc agresorii imperialişti. Deaceia tineretul din ţările lagărului imperialist leagă strîns lupta pentru îmbunătăţirea condiţiilor de viaţă, de lupta pentru pace. Tineretul din aceste ţări se ridică cu hotărîre şi luptă pentru apărarea păcii şi a drepturilor sale legitime strîngînd tot mai mult rîndurile sub steagul Federaţiei Mondiale a Tineretului Democrat. F.M.T.D. devine an de an o forţă tot mai puternică în lupta pentru pace, unitatea internaţională a tineretului creşte şi se întăreşte necontenit, cuprinzînd mase tot mai largi de tineri din diferitele pături sociale şi de diferite credinţe politice şi religioase.

Tineretul din ţările capitaliste refuză să fie carne de tun pentru imperialiştii americani, iar închisorile şi torturile nu vor putea zdruncina conştiinţa înaintată a tineretului doritor de pace.

In vederea pregătirii unui nou război mondial, imperialiştii americani caută să otrăvească mintea tineretului îndepărtîndu-l dela valoroasele tradiţii progresiste ale culturii. Dela scrierile pornografice şi filmele cu gangsteri şi crime pînă la controlarea de către F.B.I. a cursurilor din şcoli şi universităţi, totul este întrebuinţat de către cercurile guvernamentale din S.U.A., pentru înăbuşirea gîndirii înaintate, pentru întoarcerea la barbarie. Aceasta pentrucă numai din oameni pătrunşi de conţinutul putred al unei astfel de educaţii se pot recruta asasinii necesari pentru războiul inuman pe care îl pregătesc, asasinii care cu sînge rece să poată folosi metodele întrebuinţate de imperialişti în războaiele de jaf şi cotropire.

Propaganda americană caută să lichideze tradiţiile progresiste ale culturii naţionale din ţările Europei apusene. Ei însă se izbesc de o rezistenţă puternică, organizată de toate forţele patriotice la care tinerii îşi aduc contribuţia lor însemnată. Tineretul din aceste ţări continuă cu vigoare sporită să lupte pentru drepturi şi libertate, împotriva militarizării învăţămîntului.

Tinerii din aceste ţări privesc cu încredere şi speranţă la marile instituţii de cultură din Uniunea Sovietică şi ţările de democraţie populară, deschise pentru toţi tinerii dornici de învăţătură.

Tineretul lumii vede în gloriosul tinerel sovietic un minunat exemplu de luptători neobosiţi pentru cauza păcii şi fericirea popoarelor, de luptători activi pentru apărarea şi promovarea adevăratei culturi — a culturii puse în slujba vieţii.

In țara noastră liberă, partidul clasei muncitoare, avînd ca ajutor vrednic și credincios Uniunea Tineretului Muncitor, educă un tineret nou, un cetățean nou. Tineretul din orașele și satele țării noastre are asigurat dreptul la învățătură, la muncă, la odihnă, sport. Din rîndurile tineretului se ridică numeroși stahanoviști și fruntași în producție și învățătură. Numărul studenților s-a dublat față de anul 1938—39. O ilustrare a largilor drepturi politice de care se bucură tineretul din R.P.R. este numărul mare de aleși în Sfaturile Populare.

Tineretul din țara noastră contribuie cu entuziasm la construirea unei vieți noi, punîndu-și întreaga lor energie creatoare în slujba poporului, a socialismului. Tineretul muncitor al patriei noastre în frunte cu U.T.M.-iștii depun toate eforturile pentru dezvoltarea întrecerii socialiste și a mișcării stahanoviste, pentru îndeplinirea și depășirea normelor, pentru obținerea unei recolte îmbelșugate.

In scopul realizării sarcinilor mărețe ce-i stau în față, tineretul patriei noastre își strînge în aceste zile ale Săptămînii Tineretului, și mai mult rîndurile, întărește solidaritatea activă cu tineretul din întreaga lume, pășește cu hotărîre crescîndă în lupta pentru o pace trainică, pentru democrație, pentru un viitor fericit.

PREMIILE „REVISTEI MATEMATICE ȘI FIZICE" PE ANUL 1953

Pentru activitatea deosebită, desfășurată de unii corespondenți evidențiați în anul 1953, s-a hotărît acordarea de premii și mențiuni în cărți, trecute în dreptul fiecăruia printr-un număr de ordine, următorilor tovarăși:

PREMII

1. IOSIFESCU V. MARIUS, cl. XI. Pitești (1, 2, 3, 7, 8, 11, 12, 15, 18, 20).
2. TĂTARU D. EMIL, cl. X. Aiud (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 20).
3. POPESCU I. MIHAIL, student, București (1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 11, 26).
4. TORJESCU S. FLORIN, cl. XI. Ploești (1, 2, 3, 5, 7, 8, 13, 20).
5. DRAGOMIR CONSTANTIN, cl. XI. Pitești (1, 2, 3, 5, 6, 7, 13, 20).
6. PETRICĂ ZAMFIRA, cl. X. Lic. 2—10—13 fete, București, (1, 2, 3, 5, 6, 8, 15, 26).
7. UDRESCU VALERIU, student Politehnica București (1, 2, 3, 5, 6, 8, 15, 26).
8. LICEA IOAN, student Matematici, București (1, 2, 3, 5, 6, 8, 14, 22).
9. WESZELY TIBERIU, student Matematici, București (1, 2, 3, 5, 6, 13, 19, 26).
10. MIHAI T. IULIAN, cl. XI. Ploești (1, 2, 3, 5, 8, 14, 19, 26).
11. BOCU E. MIRCEA, cl. X. Oradea (1, 2, 3, 4, 5, 12, 19, 27).
12. BUZULOIU VASILE, cl. X. Oradea (1, 2, 3, 4, 6, 13, 19, 27).
13. PANDREA NICOLAE, cl. X. Focșani (1, 2, 3, 13, 18, 19, 23, 27).
14. PETROVICI RADU, cl. XI. Focșani (1, 2, 3, 12, 18, 19, 23, 27).
15. BERCEA I. GHEORGHE, student Timișoara (1, 2, 3, 14, 18, 19, 23, 27).
16. MĂNESCU C. MIRCEA, cl. X. C. Lung-Muscel (1, 2, 3, 15, 18, 19, 23, 28).
17. PETCU I. DUMITRU, cl. XI. Giurgiu (1, 2, 3, 12, 18, 19, 23, 28).
18. IONESCU V. SAVIN, cl. XI. Pitești (1, 2, 3, 15, 18, 19, 23, 28).
19. HAMMER LADISLAU, student Matematici București (1, 2, 3, 12, 18, 23, 28).
20. MICLĂUȘ VASILE, cl. XI. Roșiorii de Vede (1, 2, 18, 21, 23, 24, 25, 28).
21. CRISTEA ION, cl. IX. Constanța (1, 2, 6, 18, 23, 24, 25, 28).
22. CONSTANTINESCU G. FLORIN, cl. X. Cluj (1, 2, 6, 16, 23, 24, 28).
23. KESTENBAND BARBU, cl. X. L.b. 6, București (1, 2, 6, 16, 23, 24, 28).
24. MIHĂILESCU N. ȘTEFAN, student, București (1, 2, 6, 16, 23, 24, 28).
25. BREZEANU IOANIN, cl. XI. Tîrgoviște (1, 6, 10, 16, 23, 24, 28).
26. STROE RADU, cl. IX. Ploești (1, 6, 10, 16, 23, 24, 28).
27. TIȚA I. NICOLAE, student Matematici, București (1, 6, 10, 17, 23, 24, 25).
28. FILIMON ȘTEFAN, cl. XI. Tr. Severin (1, 6, 10, 17, 23, 24, 25).
29. STOICESCU T. DUMITRU, cl. XI. Buzău (1, 6, 10, 17, 23, 24, 25).
30. UȚĂ FLORIAN MARIN, cl. XI. Predeal (1, 6. 10, 17, 19, 23, 24).

31. DONESCU DRAGOMIR, cl. X. Focşani (2, 6, 10, 17, 19, 23, 24).
32. TĂNASE DUMITRU, anul III, Şcoala măsurători terestre Bucureşti (1, 6, 10, 17, 19, 23, 24).
33. SINCAN CORNELIU, student Politehnica Bucureşti (2, 6, 10, 17, 19, 23, 24).
34. ANDREESCU GH. RADU, cl. X. L.b. 10 Bucureşti (1, 6, 10, 17, 19, 23, 24).
35. MÎNDRU ANATOLIE, student Politehnica Bucureşti (2, 6, 10, 17, 19, 23, 24).
36. ANDREESCU GH. MIRCEA, student Politehnica Bucureşti (1, 6, 10, 19, 23, 24).
37. COSTACHE TITUS ROMANUS, student Bucureşti (2, 6, 8, 10, 23, 24).
38. LUPUŢIU IOAN, cl. X. Ploeşti, (1, 6, 8, 10, 23, 24).
39. DOGARU T. MIHAI, cl. XI. Ploeşti (2, 6, 8, 10, 23, 24).
40. POPESCU AL. DAN, cl. XI. Reşiţa (1, 6, 8, 9, 23, 24).
41. TOFAN LILIANA, absolventă Codlea, Oraşul Stalin, (2, 6, 8, 9, 23, 24).
42. PUPĂZAN NICOLAE, cl. XI. Predeal (1, 6, 8, 9, 23, 24).
43. MIU GH. FILIPOIU, student Bucureşti (2, 6, 8, 9, 19, 24).
44. SAVIN DAN, an IV. Sc. med. cărbuni, C. Lung Muscel (1, 6, 8, 9, 19, 24).
45. SCHILERU I. DINU, cl. VIII. L.b.1. Bucureşti (2, 6, 8, 9, 19, 24).

MENŢIUNI

1. GHEŢIA I. EUGEN, student Bucureşti (1, 6, 10, 24).
2. MITU VELICU, cl. XI. Giurgiu (2, 6, 10, 24).
3. LAZĂR ALDO, student Matematici Bucureşti (1, 6, 10, 24).
4. NICOLAE ALEXANDRU, cl. XI. L.b. 1 Bucureşti (2, 6, 9, 10).
5. VASILIU GHEORGHE, cl. XI. Galaţi (1, 6, 9, 10).
6. ZIGULESCU D. MARIN, cl. XI. R.-Vîlcea (2, 6, 9, 10).
7. PÎRVULESCU EMIL, cl. XI. Tr. Severin (1, 6, 9, 10).
8. STĂNULEŢ MIHAI, cl. VIII. Tr. Severin (2, 6, 8, 10).
9. PETROVICI LIVIU, student Bucureşti (1, 6, 8, 10).
10. MATEI T. NICOLAE, student Bucureşti (2, 6, 8, 10).
11. TIŢA D. CONSTANTIN, student Timişoara (1, 6, 9, 10).
12. NAN STELIAN, cl. XI. Oraşul Stalin (2, 6, 9, 10).
13. STOIAN I. GHEORGHE, cl. IX. Tîrgovişte (1, 6, 9, 10).
14. FOTĂ M. STAN, cl. XI. Giurgiu (2, 6, 9, 10).
15. CAVALERU ALEXANDRU, student Bucureşti (1, 6, 9, 10).
16. IOAN D. IOAN, student Bucureşti (2, 6, 8, 9).
17. TOFAN V. IOAN, cl. XI. Bacău (1, 6, 8, 9).
18. POPESCU ST. DORU, cl. XI. Ploeşti (2, 6, 8, 9).
19. PĂUN GHEORGHE, student Bucureşti (1, 6, 8, 9).
20. MARINESCU C. GHEORGHE, student Bucureşti (2, 6, 8, 9).
21. LAZĂR C. DUMITRU, cl. XI. Rădăuţi (1, 6, 8, 9).
22. OPREA AURELIAN, cl. IX. Tîrgovişte (2, 6, 8, 9).
23. PARCICU MIRCEA, absolvent şc. petrol Cîmpina (1, 6, 8, 9).
24. PETEANU VASILE, cl. X. Aiud (2, 6, 8, 9).
25. BĂLESCU GH. EFTIMIE, cl. XI. Tîrgovişte (1, 6, 8, 9).
26. POPOVICI I. RADU, cl. IX. L.b. 6 Bucureşti (2, 6, 8, 9).

* * *

Dăm mai jos titlurile cărţilor acordate ca premiu sau menţiune, trecute cu numărul lor de ordine:

1. *V. I. Smirnov.* Curs de matematici superioare. Vol. I. Traducere din limba rusă. Editura Tehnică, 1953.
2. *Gh. Th. Gheorghiu.* Probleme de algebră şi analiză matematică. Editura Tehnică, 1953.
3. — Termodinamica şi mecanica fluidelor. Curs. 1952.
4. *Caius Iacob.* Introducere matematică în mecanica fluidelor. Editura Tehnică, 1952.
5. *Litvin.* Bazele teoretice ale electricităţii. Traducere din limba rusă.
6. *B. V. Gnedenco şi A. I. Hincin.* Introducere elementară în calculul probabilităţilor. Traducere din limba rusă.
7. *V. V. Socolovski.* Teoria plasticităţii. Traducere din limba rusă. Editura Tehnică, 1953.
8. *Eugen Rusu.* Bazele teoriei numerelor. Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice din R.P.R., Bucureşti 1953.
9. *A. I. Marcuşevici.* Şiruri recurente. Traducere din limba rusă. Biblioteca S.S.M.T. Bucureşti 1953.
10. *N. N. Vorobiev.* Numerele lui Fibonacci. Traducere din limba rusă. Biblioteca S.S.M.F. Bucureşti 1953.

11. — Hidraulica I—II. Cursuri speciale litografiate, 1952.
12. *Aurelian Stan şi Mircea Grumăzescu.* Culegere de probleme de mecanică tehnică. Editura Tehnică 1953.
13. — Hidroenergetică generală. Curs pentru şcoli tehnice, 1952.
14. *Gh. Vrînceanu.* Lecţii de geometrie diferenţială. Vol. I. Editura Academiei R.P.R., Bucureşti 1952.
15. *I. M. Ghelfand.* Lecţii de algebră liniară. Traducere din limba rusă. Editura Tehnică, 1953.
16. *Borisov.* Tînărul radioamator. Editura Tehnică Bucureşti 1952.
17. *N. P. Tarasov.* Manual de matematici superioare. Traducere din limba rusă. Bucureşti 1953.
18. *E. Bădărău.* Introducere în acustică. Editura Academiei R.P.R., Bucureşti 1953.
19. *N. M. Ghiunter şi R. O. Cuzmin.* Culegere de probleme de matematici superioare. Vol. I. Traducere din limba rusă.
20. *Pietrovski.* Maşini electrice. Traducere din limba rusă.
21. *N. N. Buchholtz, I. M. Voronkov, I. A. Minakov.* Culegere de probleme de mecanică raţională. Traducere din limba rusă.
22. *Crug.* Bazele electrotehnicei. Traducere din limba rusă.
23. *S. P. Strelcov, I. A. Elţin şi I. A. Iacovlev.* Culegere de probleme pentru fizică generală. Partea I. Traducere din limba rusă.
24. — Tabele şi formule matematice. Editura Tehnică 1953.
25. *Jerebţov.* Radiotehnica pentru amatori.
26. *Zaiţev.* Culegere de probleme. Traducere din limba rusă.
27. *G. K. Suslov.* Mecanica raţională. Vol. II. Traducere din limba rusă.
28. *I. S. Antoniu.* Culegere de probleme speciale de electrotehnică.

* *
*

Rugăm pe tovarăşii premiaţi sau menţionaţi, să ne comunice de îndată pe adresa: « Revista Matematică şi Fizică », adresa lor actuală, pentru a li se expedia premiile acordate sau să se prezinte personal pentru a ridica aceste cărţi dela sediul redacţiei din strada Dionisie Lupu, nr. 40, parter, Bucureşti.

După primirea cărţilor vă rugăm să ne trimiteţi o dovadă de primirea lor.

DESPRE MOMENTUL DE INERŢIE

Prof. Univ. N. BĂRBULESCU

Momentul de inerţie constitue o mărime fizică de o însemnătate deosebită în studiul mişcării de rotaţie a corpurilor. Dacă înainte vreme momentul de inerţie se studia numai în învăţămîntul superior, astăzi el a pătruns şi în expunerile populare tehnice. Un exemplu ni-l dă *Mecanica Tehnică* publicată de profesorul V. A. Goranski, dela *Institutul de Mecanizare şi Electrificare a Agriculturii « V. M. Molotov »* din U.R.S.S. Cartea a fost tradusă în romîneşte şi a apărut în Editura Tehnică, 1951. Ea conţine o expunere populară admirabilă, despre mecanica tehnică adaptată programului şcoalelor de mecanici S.M.T., brigadierilor dela brigăzile de tractoare, şi muncitorilor dela combine. Profesorul Goranski foloseşte în expunerea sa, exemple tehnice care lămuresc în mod concret, noţiunea de moment de inerţie.

Se ştie că energia cinetică e a unui punct material de masă m şi de viteză v, este dată de expresia

$$e = \frac{mv^2}{2}.$$

Deasemenea se ştie că un *corp rigid* poate fi considerat ca un ansamblu de puncte materiale. Energia cinetică W a corpului rigid este suma energiilor cinetice ale punctelor materiale componente:

$$W = \sum \frac{mv^2}{2}. \qquad (1)$$

a) Cînd corpul rigid are o mişcare de translaţie, toate punctele lui execută deplasări paralele şi egale. Rezultă de aici, că viteza de translaţie v, dela un moment oarecare este aceiaşi pentru toate punctele corpului rigid: factorul $\frac{v^2}{2}$ fiind constant, putem scrie:

$$W_t = \frac{v^2}{2} \sum m$$

dar $\sum m$ reprezintă masa M a corpului considerat deci:

$$W_t = \frac{Mv^2}{2} \qquad (2)$$

adică: *energia cinetică W_t a unui corp rigid în mişcare de translaţie, este egală cu jumătatea produsului dintre masă şi patratul vitezei.*

b) Cînd corpul rigid are o mişcare de rotaţie în jurul unei axe, toate punctele lui execută în acelaşi timp, deplasări paralele, dar neegale. Punctele mai apropiate de axă descriu în acelaşi timp arce mai mici decît punctele mai depărtate de axă. Aşa că, pentru mişcarea de rotaţie a unui corp nu putem defini o *viteză lineară* unică, aşa cum definim la mişcarea de translaţie. In schimb, există o *viteză unghiulară* unică, aceiaşi pentru toate punctele corpului rigid, în rotaţie. Pentru un punct din corp aflat la depărtarea r de axa de rotaţie, relaţia dintre viteza lineară v şi viteza unghiulară ω este:

$$v = r\omega.$$

Introducînd această valoare a lui v în formula (1), obţinem pentru energia cinetică W_r a corpului rigid în rotaţie:

$$W_r = \sum \frac{mr^2\omega^2}{2}$$

sau, ţinînd seama că factorul $\frac{\omega^2}{2}$ este acelaşi pentru toate punctele corpului rigid:

$$W_r = \frac{\omega^2}{2} \sum mr^2 \qquad (3)$$

observăm că energia cinetică de rotaţie W_r poate să fie exprimată printr'o formulă analoagă cu aceea a energiei de translaţie W_t dacă punem:

$$I = \sum mr^2. \qquad (4)$$

Mărimea I se numeşte *moment de inerţie al corpului, în raport cu axa de rotaţie* considerată. Folosind această notaţie, formula (3) devine:

$$W_r = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (5)$$

adică, *energia cinetică a unui corp rigid în rotaţie este egală cu jumătatea produsului dintre momentul de inerţie şi patratul vitezei unghiulare.*

Astfel, necesitatea de a calcula energia cinetică a unui solid în rotaţie printr-o formulă simplă analoagă celei dela mişcarea de translaţie, impune introducerea noţiunii de moment de inerţie în raport cu axa de rotaţie. Datorită acestei noţiuni, studiul mişcării de rotaţie a corpurilor solide se uşurează foarte mult, prezentînd o mare analogie cu studiul mişcării de translaţie.

Ce este momentul de inerţie?

Formula (4) ne conduce imediat la definiţia momentului de inerţie al unui corp în raport cu axa de rotaţie: *este suma produselor ce se obţin înmulţind masa fiecărui punct din corp, cu patratul distanţei punctului respectiv, de axa de rotaţie.*

Din compararea formulei (2) cu formula (5) putem trage concluzia că *momentul de inerţie I are în dinamica mişcării de rotaţie, acelaşi rol pe care-l are masa M în dinamica mişcării de translaţie.*

Analogia merge şi mai departe: după cum masa M a unui corp este egală cu suma maselor punctelor constituente:

$$M = \sum m$$

tot astfel, *momentul de inerţie al unui corp în raport cu o axă este egal cu suma momentelor de inerţie în raport cu aceiaşi axă, ale punctelor sale componente.* In adevăr, după cum am definit momentul de inerţie I al unui corp în raport cu axa de rotaţie, putem să definim şi momentul de inerţie al unui punct, în raport cu o axă. Această din urmă mărime, reprezintă produsul dintre masa m a punctului şi patratul depărtării r a acestui punct, de axa de rotaţie:

$$i = mr^2 \qquad (6)$$

In consecinţă formula (4) se mai poate scrie:

$$I = \sum i \qquad (7)$$

adică, momentele de inerţie ale particulelor dintr-un corp se însumează la fel ca şi masele acestor particule.

Momentul de inerţie fiind o mărime fizică, este şi el supus măsurării. Pentru aceasta trebue în prealabil, să definim un *moment de inerţie unitate.* După formula (6) avem: $i = 1$ când $m = 1$ şi $r = 1$; deci, unitatea de moment de inerţie reprezintă momentul de inerţie al unităţii de masă, situată la unitatea de distanţă de axa în raport cu care se ia momentul.

In sistemul C.G.S. unitatea de moment de inerţie se numeşte *gramcentimetru pătrat* şi se notează pe scurt prin $g.cm^2$: este *momentul de inerţie al unei mase de un gram, situată la distanţa de un centimetru de axa în raport cu care se ia momentul.*

In sistemul MKS unitatea de moment de inerţie se numeşte *kilogram metru patrat* şi se notează prescurtat prin $kg.m^2$: este *momentul de inerţie al unei mase de un kilogram masă situată la distanţa de un metru de axă în raport cu care se ia momentul.* Intre $kg.m^2$ şi $g.cm^2$ există o relaţie de echivalenţă:

$$1\ kg.m^2 = 1000\ g\ (100\ cm)^2 = 10^7\ g.cm^2$$

adică, *unitatea MKS de moment de inerţie, este de 10 000 000 ori mai mare decât unitatea CGS a aceleiaşi mărimi.*

Să lămurim acum dece mărimii $i = mr^2$ sau $I = \sum mr^2$, i s-a dat denumirea de «moment de inerţie».

Se ştie că în fizică cuvîntul «moment» are două semnificaţii: o semnificaţie se leagă de curgerea timpului, iar cealaltă se leagă de poziţia unui vector în raport cu un punct, cu o axă sau cu un plan. Bunăoară, momentul unui vector F în raport cu un punct, reprezintă produsul dintre mărimea F (valoarea numerică) a vectorului şi distanţa lui pînă la punctul considerat.

Mărimea i a primit numele de *moment*, deoarece este strîns legată de momentul unui vector. In adevăr, din formula $v = r\omega$ scoatem: $r = \frac{v}{\omega}$; introducem această valoare în expresia lui i:

$$i = \frac{1}{\omega} mvr.$$

Se vede de aici, că momentul de inerţie i este proporţional cu produsul mvr, factorul de proporţionalitate $\frac{1}{\omega}$ fiind acelaşi pentru toate punctele unui solid în rotaţie.

Pe de altă parte, expresia mvr poate fi considerată ca produsul dintre mv şi r. Ori, mv reprezintă un vector: este vectorul *cantitate de mişcare* $= \overline{p}$ a punctului considerat. Expresia $k = mvr = pr$ reprezintă atunci, produsul dintre vectorul $\overline{p}$ şi distanţa r dela acest vector pînă la axa de rotaţie; este deci, momentul cantităţii de mişcare sau momentul cinetic în raport cu axa de rotaţie. Astfel ajungem la concluzia că i este o mărime proporţională cu momentul cantităţii de mişcare, în raport cu axa de rotaţie, a punctului sau corpului considerat, ceeace justifică prezenţa cuvîntului «moment» în denumirea mărimii i sau I.

Dece însă, moment de «inerţie»? Pentrucă I măsoară inerţia corpului la mişcarea de rotaţie aşa după cum M măsoară inerţia la mişcarea de translaţie. Intr-adevăr, pentru a scoate un corp rigid din repaus şi a-i da o mişcare de rotaţie, trebuie să cheltuim energie care constitue tocmai provizia lui de energie cinetică. Datorită inerţiei, corpul rezistă acestei schimbări de stare; pentru o anumită cantitate de energie cheltuită, corpul se roteşte cu atît mai încet (are o viteză unghiulară ω cu atît mai mică) cu cît inerţia lui este mai mare. Ori, formula (5) arată că pentru un W_r dat ω este mai mic cînd I este mai mare. Deci, la o inerţie mare corespunde un I mare, ceeace înseamnă că I poate să măsoare inerţia corpurilor pentru mişcarea de rotaţie. Cu alte cuvinte, *I este coeficientul de inerţie pentru rotaţie, aşa după cum M este coeficientul de inerţie pentru translaţie.*

Există totuşi, o deosebire fundamentală între masa M şi momentul de inerţie I. Pentru un corp dat, masa este o mărime constantă oricare ar fi felul mişcării, pe cîtă vreme momentul de inerţie este o mărime variabilă; el variază cu poziţia pe care axa de rotaţie o are în corp. De aceea, expresia «momentul de inerţie al unui corp» este o expresie incomplectă. Trebue să spunem «momentul de inerţie al corpului în raport cu cutare axă», specificînd totdeauna axa de rotaţie faţă de care considerăm momentul de inerţie.

Cum se calculează momentul de inerţie?

Momentul de inerţie al unui corp în raport cu o axă de rotaţie, se determină fie prin calcul, fie pe cale experimentală. Determinarea prin calcul se face uşor în cazul cînd corpul este omogen şi de formă geometrică regulată. Dimpotrivă, calea experimentală poate fi folosită în toate cazurile, oricare ar fi forma şi alcătuirea corpului.

Metoda generală de calcul este următoarea: considerăm corpul împărţit într-un număr foarte mare de porţiuni foarte mici (punctuale). Fie Δm masa unei astfel de porţiuni foarte mici şi r depărtarea ei de axa de rotaţie. Momentul de inerţie ΔI al porţiunii considerate în raport cu axa de rotaţie dată, este după definiţie:

$$\Delta I = \Delta mr^2$$

Am spus mai sus, că momentul de inerţie I al unui corp este egal cu suma momentelor de inerţie ale punctelor sale componente. Deci,

$$I = \sum \Delta mr^2$$

cu condiţia ca porţiunile de corp să fie cât mai mici cu putinţă, pentru a putea fi considerate ca simple puncte materiale, aşa încît, pentru fiecare masă Δm să avem o singură distanţă r. Această condiţie este satisfăcută dacă mărim la infinit numărul porţiunilor în care trebue să divizăm corpul respectiv.

Operaţia aceasta, de însumarea unor cantităţi extrem de mici (în matematică ele tind către zero), în număr extrem de mare, se face comod prin metodele *calculului integral*. S-au imaginat însă, şi metode care folosesc calculul algebric simplu, la îndemîna acelora cari nu posedă cunoştinţe mai înalte de matematică. Este drept că aceste din urmă metode nu sunt aşa de rapide ca metodele calculului integral, dar au în schimb avantajul că sunt mai intuitive, putîndu-se urmări de fiecare dată în mod direct, operaţia de însumare. In cele ce urmează vom da cîteva din aceste metode.

a) *Momentul de inerție al unei coroane circulare foarte subțiri (circumferințe) în raport cu axa de rotație care trece prin centrul coroanei și este perpendiculară pe planul ei.*

Considerăm o coroană circulară extrem de subțire (circumferință) (fig. 1), de raza R. Procedînd după metoda generală expusă mai sus, vom descompune circumferința în porțiuni extrem de mici, fiecare porțiune avînd o masă extrem de mică Δm. Deoarece am presupus grosimea circumferinței neglijabilă, aceasta înseamnă că toate punctele ei se găsesc la aceeași distanță R de axa care trece prin O și este perpendiculară pe planul figurii. In consecință, momentul de inerție ΔI al unei porțiuni extrem de mici din această circumferință este

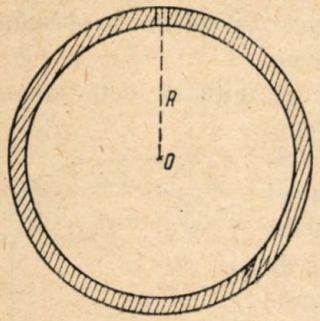


Fig. 1

$$\Delta I = \Delta m R^2$$

și deci:

$$I = \sum \Delta m\, R^2 = R^2 \sum \Delta m.$$

Cum $\sum \Delta m = M$, masa circumferinței materiale, avem:

$$I = MR^2 \qquad (8)$$

adică, *momentul de inerție al unei circumferințe de masă M, în raport cu axa care trece prin centru și este perpendiculară pe planul ei, este dat de produsul dintre masa circumferinței și patratul razei ei.*

b) *Momentul de inerție al unui disc foarte subțire în raport cu axa care trece prin centrul său și este perpendiculară pe planul său.*

Potrivit metodei generale, descompunem discul într-un număr extrem de mare de coroane circulare foarte subțiri. Fie Δm masa unei astfel de coroane (fig. 2) și r_m, raza medie a ei. Momentul de inerție elementar ΔI al acestei coroane este:

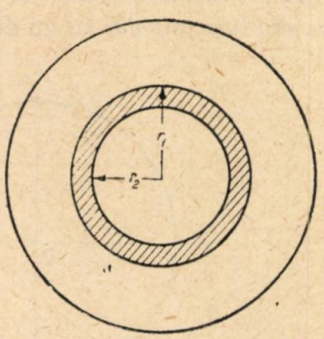


Fig. 2

$$\Delta I = \Delta m r_m^2 \quad (8\ a)$$

Să stabilim pentru ΔI și Δm expresiile necesare calculului ce-l urmărim. In acest scop, considerăm densitatea superficială d a discului: este masa corespunzătoare unității de suprafață a discului. Insemnînd cu ΔS suprafața coroanei elementare considerate, avem:

$$d = \frac{\Delta m}{\Delta S}$$

și cum $\Delta S = \pi (r_1^2 - r_2^2)$, deducem:

$$\Delta m = d \Delta S = \pi d (r_1^2 - r_2^2) \qquad (9)$$

Pe de altă parte, coroana fiind presupusă extrem de subțire, r_1 și r_2 sunt mărimi extrem de puțin diferite între ele. In consecință, putem pune [1]:

$$r_m^2 = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2}. \qquad (10)$$

Introducem în (8 *a*) relațiile (9) și (10); obținem:

$$\Delta I = \pi d (r_1^2 - r_2^2) \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} = \frac{\pi d}{2} (r_1^4 - r_2^4).$$

---

[1]) Considerăm un segment de dreaptă Δl ale cărui extremități sunt depărtate de un punct oarecare O (fig. 3)

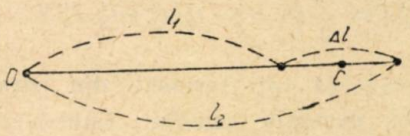


Fig. 3

cu lungimile respective l_1 și l_2. Fie l_m depărtarea de O a punctului central C. Avem de pe figură:

$$l_m = l_1 + \frac{\Delta l}{2}$$

$$l_m = l_2 - \frac{\Delta l}{2}$$

de unde făcînd suma:

$$2l_m = l_1 + l_2$$

și ridicînd la patrat:

$$4l_m^2 = l_1^2 + 2l_1 l_2 + l_2^2. \qquad (a)$$

Să presupunem că l_1 și l_2 sunt foarte puțin diferite între ele, ceeace înseamnă că segmentul Δl este extrem de mic. Putem admite că $l_1 l_2 \approx l_m^2$ așa că:

$$4l_m^2 - 2l_m^2 = l_1^2 + l_2^2$$

de unde

$$l_m^2 = \frac{l_1^2 + l_2^2}{2}$$

formulă folosită în demonstrația de mai sus.

Din (*a*) putem deduce și altă relație, de care ne vom folosi ceva mai departe:

$$4l_m^2 - l_1 l_2 = l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2$$

In membrul întîi introducem relația admisă mai sus: $l_1 l_2 \approx l_m^2$ ceeace dă:

$$l_m^2 = \frac{l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2}{3}.$$

Considerăm ca primă coroană pe aceea dela periferia discului: $r_1 = R$. Momentul de inerţie respectiv este:

$$\Delta I_1 = \frac{\pi d}{2}(r_1^4 - r_2^4).$$

Coroana imediat următoare are raza exterioară egală cu raza interioară r_2 a coroanei precedente, deci:

$$\Delta I_2 = \frac{\pi d}{2}(r_2^4 - r_3^4)$$

şi aşa mai departe, putem scrie o serie întreagă de expresii de felul acesta, pentru toate celelalte coroane subţiri în care am descompus discul dat. Ultima coroană are raza interioară neglijabilă, aşa că o vom lua egală cu zero.

Momentul de inerţie I al discului este egal cu suma momentelor de inerţie ale coroanelor elementare:

$$I = \sum \Delta I = \frac{\pi d}{2}(r_1^4 - r_2^4 + r_2^4 - r_3^4 + r_3^4 - r_4^4 + \ldots - 0) \quad (11)$$

Observăm că toţi termenii din paranteză se reduc, cu excepţia primului. Cum r_1 reprezintă însăşi raza R a discului, obţinem:

$$I = \frac{\pi d}{2} R^4. \quad (12)$$

Discul fiind omogen, mai putem defini densitatea superficială d prin raportul dintre masa M şi suprafaţa S a întregului disc.

$$d = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}.$$

Introducînd această valoare în (12), obţinem:

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

adică, *momentul de inerţie al unui disc, în raport cu axa perpendiculară care trece prin centrul lui, este egal cu jumătatea produsului dintre masă şi patratul razei.*

Cu ajutorul acestui rezultat putem să calculăm *momentul de inerţie al unui cilindru plin în raport cu axa lui.* Considerăm cilindrul plin ca un ansamblu de discuri circulare pline, extrem de subţiri. Fie Δm masa unui astfel de disc elementar şi ΔI momentul său de inerţie în raport cu axa care trece prin centrul lui şi este perpendiculară pe disc. Avem după (13):

$$\Delta I = \frac{1}{2} \Delta m R^2.$$

Ştiind că momentul de inerţie al unui corp este egal cu suma momentelor de inerţie ale părţilor componente, avem:

$$I = \sum \Delta I = \frac{1}{2} R^2 \sum \Delta m = \frac{1}{2} MR^2$$

adică, *momentul de inerţie al unui cilindru plin în raport cu axa lui este egal cu jumătatea produsului dintre masă şi patratul razei.*

Un calcul analog ne permite să determinăm momentul de inerţie în raport cu axa, al unui cilindru gol, cu pereţii groşi (fig. 4). Considerăm acest cilindru ca un ansamblu de coroane circulare de grosime extrem de mică, avînd toate raza exterioară R_1, iar raza interioară R_2. Momentul de inerţie ΔI al unei astfel de coroane se calculează după formula (11) în care raza finală nu mai este zero, ci r_n:

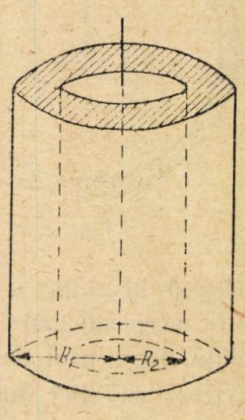


Fig. 4

$$I = \frac{\pi d}{2}(r_1^4 - r_2^4 + r_2^4 - r_3^4 + \ldots + r_{n-1}^4 - r_n^4).$$

Cum $r_1 = R_1$ şi $r_n = R_2$, avem:

$$I = \frac{\pi d}{2}(R_1^4 - R_2^4).$$

Pe de altă parte:

$$d = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}$$

aşa că:

$$I = \frac{M}{2} \cdot \frac{R_1^4 - R_2^4}{R_1^2 - R_2^2} = \frac{1}{2} M(R_1^2 + R_2^2).$$

c) *Momentul de inerţie al unui disc plan în raport cu axa care coincide cu un diametru.*

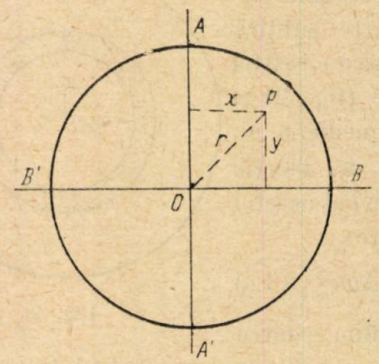


Fig. 5

Fie AA' axa de rotaţie (fig. 5) şi P un punct oarecare al discului, aflat la depărtarea x de axă.

Momentul de inerţie I_A al discului în raport cu axa de rotaţie AA este

$$I_A = \sum mx^2.$$

Considerăm o a doua axă de rotaţie BB perpendiculară pe AA şi situată deasemenea pe direcţia unui diametru. Depărtarea punctului P de axa BB este y, aşa că momentul de inerţie I_B al discului în raport cu axa BB este:

$$I_B = \sum my^2.$$

Se înţelege că rotaţia discului omogen se face la fel în jurul oricărui diametru. Aceasta înseamnă că momentul de inerţie al discului omogen are aceiaşi valoare, oricare ar fi diametrul ales ca axă de rotaţie, deci,

$$I_A = I_B$$

Pe de altă parte, considerând o axă de rotaţie perpendiculară pe disc şi trecînd prin centrul lui, distanţa punctului P de această axă este r:

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Momentul de inerţie I al discului, în raport cu această axă este:

$$I = \sum mr^2 = \sum m(x^2 + y^2) = \sum mx^2 + \sum my^2$$

sau ţinînd seamă de egalitatea $I_A = I_B$:

$$I = 2I_A.$$

Momentul de inerţie I îl cunoaştem din calculul expus mai sus, aşa că

$$I_A = \frac{I}{2} = \frac{1}{4}MR^2$$

adică, *momentul de inerţie al unui disc în raport cu axa care coincide cu un diametru, este egal cu un sfert din produsul masei discului prin patratul razei lui.*

d) *Momentul de inerţie al unei pături sferice extrem de subţiri în raport cu axa care coincide cu un diametru al ei.*

Considerăm o suprafaţă sferică cu centrul în O (fig. 6), avînd axa de rotaţie AA, pe direcţia unui diametru. Momentul de inerţie în raport cu axa de rotaţie AA al unui punct oarecare P de pe această suprafaţă este mr^2, în care m este masa punctului iar $r = PP_3$, reprezintă depărtarea acestui punct de axa AA. Momentul de inerţie I_A al suprafeţei sferice în raport cu axa AA, este:

$$I_A = \sum mr^2.$$

Pentru a efectua această însumare procedăm în modul următor: ducem prin axa AA un plan Ozy perpendicular pe acest plan şi trecînd prin centrul O ducem un alt plan Oxy. In sfîrşit, perpendicular pe aceste două plane şi trecînd deasemenea prin O, ducem un al treilea plan Oxz. Putem considera aceste planuri ca planuri de coordonate:

$$x = OP_1 = P'P_2$$
$$y = OP_2 = P'P_1$$
$$z = OP_3 = P'P.$$

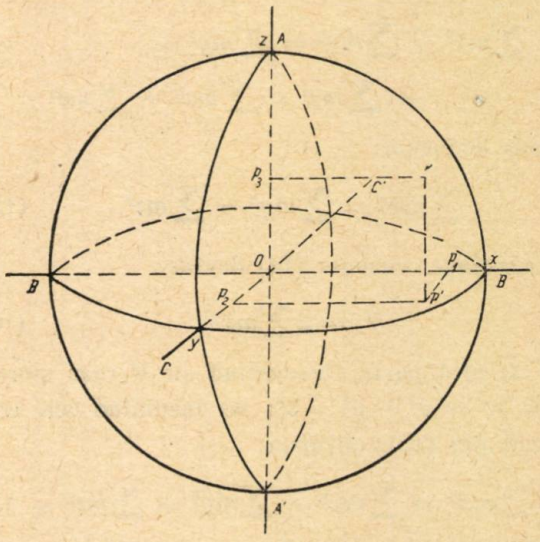


Fig. 6

Se vede de pe figură că

$$r^2 = \overline{P'O}^2 = x^2 + y^2,$$

aşa că:

$$I_A = \sum m(x^2 + y^2) = \sum mx^2 + \sum my^2. \quad (14)$$

Să considerăm momentul de inerţie I_B al, suprafeţei sferice în raport cu axa BB care are deasemenea, direcţia unui diametru. Depărtarea punctului P de axa BB este PP_1 care reprezintă ipotenuza triunghiului dreptunghi $PP'P_1$. Cum $\overline{PP_1}^2 = y^2 + z^2$, avem:

$$I_B = \sum m(y^2 + z^2) = \sum my^2 + \sum mz^2.$$

Insfîrşit, să considerăm momentul de inerţie I_C al suprafeţei sferice în raport cu axa CC, care are, deasemenea, direcţia unui diametru. Depărtarea punctului P de axa CC este $\overline{PP_2}$, ipotenuza triunghiului dreptunghi $PP'P_2$:

$$\overline{PP_2}^2 = x^2 + z^2.$$

Momentul de inerţie I_C al suprafeţii sferice în raport cu axa CC este

$$I_C = \sum m(x^2 + z^2) = \sum mx^2 + \sum mz^2.$$

Deoarece la o sferă omogenă toate diametrele sunt echivalente între ele, rotaţia sferei în jurul unui diametru nu se deosebeşte întru nimic de rotaţia în jurul oricărui alt diametru. Sfera con-

siderată opune aceiaşi rezistenţă la rotaţie, fie că se învîrteşte în jurul axei AA sau în jurul axei BB, sau în jurul axei CC. Aceasta înseamnă că momentul de inerţie al sferei este independent de poziţia axei de rotaţie, când axa coincide cu un diametru:

$$I_A = I_B = I_C$$

sau

$$\sum mx^2 + \sum my^2 = \sum my^2 + \\ + \sum mz^2 = \sum mx^2 + \sum mz^2$$

de unde deducem:

$$\sum mx^2 = \sum my^2 = \sum mz^2. \qquad (15)$$

In consecinţă, formula (14) devine:

$$I_A = 2\sum mx^2. \qquad (16)$$

Pe de altă parte, însemnînd cu R raza sferei, avem: $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$; iar însumînd cele trei expresii din (15), obţinem:

$$3\sum mx^2 = \sum mx^2 + \sum my^2 + \sum mz^2 =$$

$$= \sum m(x^2+y^2+z^2) = \sum mR^2 = R^2\sum m = MR^2$$

de unde:

$$\sum mx^2 = \frac{1}{3} MR^2.$$

Introducînd această valoare în (16) obţinem:

$$I_A = \frac{2}{3} MR^2 \qquad (17)$$

adică, *momentul de inerţie al unei pături sferice extrem de subţiri în raport cu axa de rotaţie care coincide cu unul din diametrele ei, este egal cu două treimi din produsul masei prin patratul razei.*

e) *Momentul de inerţie al unei sfere în raport cu axa pe direcţia unui diametru.*

Descompunem sfera într-un număr extrem de mare de pături sferice concentrice, extrem de subţiri. Fie Δm masa unei astfel de pături şi r_m raza medie a ei; însemnăm cu r_1, raza exterioară şi cu r_2, raza interioară a păturii. Momentul de inerţie elementar ΔI al păturii sferice în raport cu un diametru este, după (17):

$$\Delta I = \frac{2}{3} \Delta m \cdot r_m^2.$$

Să calculăm masa Δm a păturii sferice; însemnînd cu d densitatea păturii sferice, avem:

$$\Delta m = \Delta v \cdot d$$

în care Δv este volumul păturii. Deoarece pătura sferică este extrem de subţire, putem să calculăm volumul ei luînd produsul dintre suprafaţa sferică $4\pi r_m^2$ şi grosimea $r_1 - r_2$. Deci:

$$\Delta m = \Delta v \cdot d = 4\pi r_m^2 (r_1 - r_2)\, d$$

aşa că:

$$I = \frac{8}{3} \pi d r_m^4 (r_1 - r_2). \qquad (18)$$

Pe de altă parte, cum:

$$r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

avem:

$$(2r_m)^4 = (r_1 + r_2)^4$$

şi desvoltînd:

$$16r_m^4 = r_1^4 + 4r_1^3 r_2 + 6r_1^2 r_2^2 + 4r_1 r_2^3 + r_2^4$$

de unde:

$$16r_m^4 - 3r_1^3 r_2 - 5r_2^2 r_2^2 - 3r_1 r_2^3 = r_1^4 + \\ + r_1^3 r_2 + r_1^2 r_2^2 + r_1 r_2^3 + r_2^4.$$

Cum r_1 şi r_2 sunt extrem de puţin diferite între ele, putem lua în membrul întîi al expresiei de mai sus:

$$r_1 \approx r_2 \approx r_m$$

aşa că:

$$r_m^4 = \frac{r_1^4 + r_1^3 r_2 + r_1^2 r_2^2 + r_1 r_2^3 + r_2^4}{5}.$$

Introducem în (18) această valoare a lui r_m şi efectuînd calculele, avem:

$$I = \frac{8}{15} \pi d (r_1^5 - r_2^5).$$

Considerăm ca primă pătură sferică pe aceea dela periferia sferei: $r_1 = R$. Fie ΔI_1 momentul ei de inerţie, în raport cu un diametru. Avem după formula precedentă:

$$\Delta I_1 = \frac{8}{15} \pi d (R^5 - r_2^5).$$

Pătura sferică imediat următoare are raza exterioară egală cu raza interioară r_2 a păturii precedente, aşa că momentul ei de inerţie este:

$$\Delta I_2 = \frac{8}{15} \pi d (r_2^5 - r_3^5).$$

Şi aşa mai departe, putem scrie o serie întreagă de expresii de felul acesta, pentru toate celelalte pături sferice în care am descompus sfera dată. Ultima pătură sferică din jurul centrului, are raza interioară neglijabilă, aşa că o vom lua egală cu zero.

Momentul de inerţie I al sferei este egal cu suma momentelor de inerţie ale păturilor sferice componente:

$$I = \sum \Delta I = \frac{8}{15}\pi d\left(R^5 - r_2^5 + r_2^5 - r_3^5 + \ldots - 0\right)$$

şi efectuînd reducerile:

$$I = \frac{8}{15}\pi d R^5.$$

Sfera fiind omogenă, densitatea ei este dată de raportul dintre masa întreagă şi volumul respectiv:

$$d = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

deci:

$$I = \frac{8\pi}{15} \cdot \frac{3M}{4\pi R^3} R^5$$

şi efectuînd simplificările:

$$I = \frac{2}{5} M R^2$$

adică, *momentul de inerţie al sferei în raport cu o axă care coincide cu un diametru este două cincimi din produsul masei prin patratul razei.*

f) *Momentul de inerţie al unei bare subţiri în raport cu o axă care trece prin extremitatea barei şi este perpendiculară pe ea.*

Considerăm bara împărţită într-un număr foarte mare de porţiuni extrem de înguste (fig. 7). Mo-

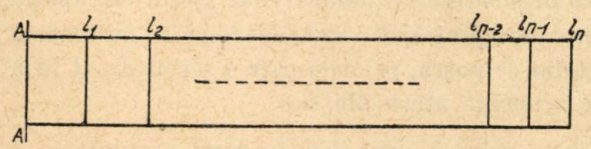


Fig. 7

mentul de inerţie ΔI al unei astfel de porţiuni elementare în raport cu axa de rotaţie AA dela extremitatea barei, este:

$$\Delta I = \Delta m \cdot l_m^2 \qquad (19)$$

în care Δm este masa porţiunii de bară iar l_m este depărtarea de axă a centrului porţiunii.

Să stabilim pentru Δm şi l_m expresii potrivite scopului ce-l urmărim (însumarea momentelor elementare). Fie M masa barei şi L lungimea ei; pe unitatea de lungime se află masa $\frac{M}{L}$. Deci, elementul de bară ce are lungimea Δl, posedă masa:

$$\Delta m = \frac{M}{L}\Delta l.$$

Feţele transversale ale elementului ΔI sunt depărtate de axa AA cu distanţele respective l_1 şi l_2:

$$\Delta l = l_2 - l_1$$

aşa că:

$$\Delta m = \frac{M}{L}(l_2 - l_1). \qquad (20)$$

Deoarece l_1 şi l_2 sunt foarte puţin diferite între ele, putem spune (vezi nota din josul pag. 63):

$$l_m^2 = \frac{l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2}{3} \qquad (21)$$

Introducem în (19) expresiile (20) şi (21):

$$\Delta I = \frac{M}{L}(l_2 - l_1)\frac{l_1^2 + l_1 l_2 + l_2^2}{3}$$

şi efectuînd calculele, obţinem:

$$\Delta I = \frac{M}{3L}(l_2^3 - l_1^3).$$

Cu ajutorul acestei formule putem alcătui expresia momentelor de inerţie ale tuturor porţiunilor în care am împărţit bara. Cea dintîi porţiune se află în contact direct cu axa AA, deci, depărtarea primei feţe de axă este zero. Momentul de inerţie ΔI_1 al acestei porţiuni este:

$$\Delta I_1 = \frac{M}{3L}(l_1^3 - 0).$$

Pentru cea de-a doua porţiune a barei, avem:

$$\Delta I_2 = \frac{M}{3L}(l_2^3 - l_1^3)$$

şi aşa mai departe pînă la ultima porţiune, situată la celălalt capăt al barei, pentru care avem:

$$\Delta I_n = \frac{M}{3L}(l_n^3 - l_{n-1}^3).$$

Momentul de inerţie I al barei în raport cu axa definită mai sus, este suma acestor momente de inerţie, elementare:

$$I = \Delta I_1 + \Delta I_2 + \Delta I_3 + \ldots + \Delta I_n$$

sau

$$I = \frac{M}{3L}(l_1^3 + l_2^3 - l_1^3 + l_3^3 - l_2^3 + \ldots + l_n^3 - l_{n-1}^3).$$

Observăm că toţi termenii din paranteză se reduc, cu excepţia penultimului $l_n^3 = L$. Obţinem astfel:

$$I = 1/3\, ML^2$$

adică, *momentul de inerţie al unei bare subţiri în raport cu axa perpendiculară dela extremitatea ei, este egal cu o treime din produsul masei barei prin patratul lungimii ei.*

Să considerăm acum cazul când axa de rotaţie se găseşte la mijlocul barei şi este deasemenea, perpendiculară pe lungimea barei. Ne putem închipui bara ca alcătuită din două bare egale, avînd fiecare masa $\frac{M}{2}$ şi lungimea $\frac{L}{2}$. Pentru fiecare jumătate de bară axa de rotaţie se găseşte la o extremitate, aşa că momentul de inerţie al fiecărei jumătăţi de bară este:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{M}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2.$$

Momentul de inerţie I al barei întregi în raport cu axa dela mijlocul ei, este suma momentelor de inerţie ale celor două porţiuni:

$$I = 2\,\frac{1}{3} \cdot \frac{M}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ML^2.$$

Incheem acest articol cu observaţia că problemele expuse aici sunt numai o introducere la studiul elementar al momentului de inerţie. Cititorii care doresc să cunoască ceva mai mult în această privinţă, găsesc o expunere clară şi atrăgătoare în *Mecanica şi Rezistenţa Materialelor* de *I. N. Veseiovschi*, carte apărută de curînd la Editura Tehnică, în a doua ediţie.

SĂ CONSTRUIM CU MIJLOACE PROPRII MODELE ŞI APARATE DE FIZICĂ

CONSTRUIREA UNUI DISPOZITIV PENTRU A DEMONSTRA MIŞCAREA DE REACŢIE *)

Se ia un tub de alamă cu lungimea de 4—5 cm şi diametrul de 1 cm, închis la un capăt, sau un tub de cartuş, se lipeşte pe o sîrmă îndoită în formă de *U*. Capetele sîrmei sunt ascuţite şi introduse în două şuruburi de reazim, fixate pe un suport special (fig. 1).

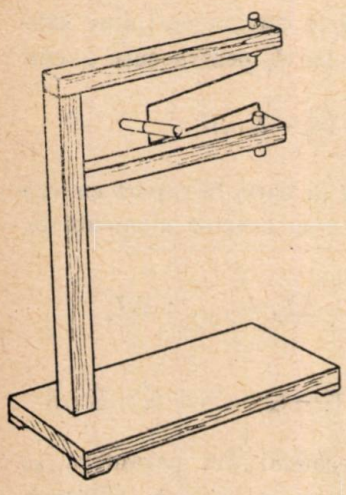


Fig. 1

In tub se introduce circa 2,5 grame peliculă de film tăiată mărunt iar apoi, un gram praf de puşcă obişnuit, de vînătoare. Tubul nu trebue astupat cu un dop, pentruca elevii să nu creadă că « racheta » se mişcă datorită reculului dopului.

Pentru aprinderea prafului de puşcă se introduce în tub o bucată de peliculă de 4 cm lungime, care se aprinde la capătul liber.

La arderea prafului de puşcă se crează un şoc care pune în mişcare dispozitivul. Arderea relativ înceată, a peliculei, întreţine această mişcare. O încărcătură ajunge pentru 5—6 rotaţii.

Profesorul trebue să observe cu stricteţă să nu fie depăşită cantitatea de peliculă şi praf de puşcă mai sus indicată, care nu prezintă pericol. La pornirea dispozitivului, tubul trebue aşezat cu capătul închis îndreptat spre elevi, deoarece la inflamarea prafului de puşcă, pelicula care a servit drept fitil, este aruncată afară din tub.

MODEL DE DIELECTRIC ÎN CÎMP ELECTRIC

Pentru ilustrarea dispoziţiei moleculelor dipolare ale unui dielectric introdus într-un cîmp electric, se poate construi următorul dispozitiv simplu. Plăcuţe dreptunghiulare dintr-un dielectric oarecare, avînd dimensiunile de aproximativ 5/1,5 cm se suspendă prin fire aşa cum se arată în figura 2. In lipsa unui cîmp electric, plăcuţele care reprezintă dipolii, se dispun desordonat. Dacă însă, ele sunt introduse între armăturile unui condensator încărcat (se foloseşte comod, un model şcolar de condensator extensibil), în urma polarizării, plăcuţele se orientează aproximativ, de-a-lungul liniilor de forţă.

Dacă se unesc între ei, conductorii maşinii electrostatice, cu ajutorul căreia s-a creat cîmpul

*) Din Fizica în şcoală 1953.

electric, cîmpul va dispare. Modelele de dipoli vor căpăta din nou orientări desordonate şi vor oscila sub acţiunea forţelor elastice ale firelor.

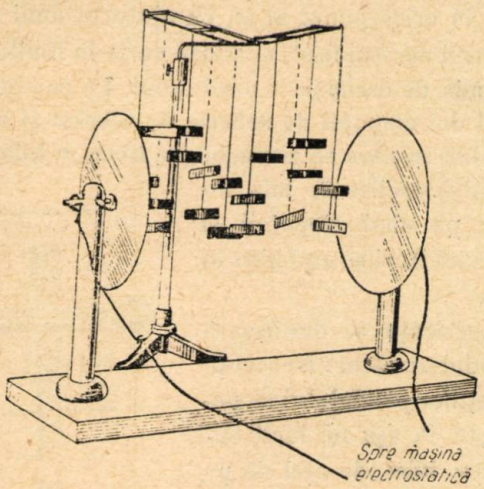


Fig. 2

Aceasta ilustrează mişcarea de agitaţie termică a dipolilor care scoate dipolii din poziţia lor orientată ordonat.

DEMONSTRAREA CÎMPULUI MAGNETIC AL UNUI CURENT RECTILINIU

La demonstraţiile cîmpului magnetic al unui curent rectiliniu, apar deobicei, dificultăţi în legătură cu lipsa unei surse dela care s-ar putea obţine un curent de o intensitate suficient de mare (circa 10—20 A). Prezenţa unei surse atît de puternice nu mai este obligatorie dacă se lasă să treacă curentul, nu printr-un singur fir, ci prin mai multe fire izolate între ele şi montate sub forma unui cablu. Realizarea unui astfel de cablu se poate face în modul următor:

Din sîrme cu un diametru de 0,2 — 0,6 mm, cu izolaţie de email sau mai bine, de mătase sau bumbac, ce înfăşoară pe o carcasă de orice formă o bobină de diametru mare cu 50—200 spire, (se pot folosi în acest scop două scaune apropiate, cu spetezele în părţile opuse). Capetele solenoidului se scot alături. Solenoidul se înfăşoară cu panglică de izolaţie (isolirband) sau cu o panglică lată, aşa că el capătă aspectul unui cablu inelar cu multe fire.

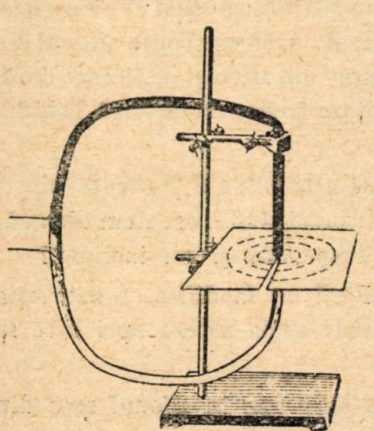


Fig. 3

De solenoid se leagă bine, doi conductori flexibili (liţă dela reţeaua de iluminat), ale căror capete se leagă bine de capetele solenoidului şi se izolează între ele (fig. 3).

Fiecare dintre conductorii de legătură şi jumătatea corespunzătoare a solenoidului se vopseşte în culori diferite, pentru a se uşura aflarea sensului curentului.

O porţiune a unui astfel de solenoid poate fi folosită drept conductor rectiliniu. La demonstrarea spectrelor magnetice, pilitura de fier se presară pe un carton tăiat până la mijloc şi îmbrăcat pe conductor.

In caz de nevoie, o parte a solenoidului poate fi înfăşurată în formă de bobină. Folosind un astfel de conductor — solenoid, se poate demonstra cu succes, cîmpul magnetic al unui curent rectiliniu, folosind drept sursă de curent, una sau două baterii de buzunar.

CONSTRUIREA UNUI FOTOMETRU

Pentru lucrarea de laborator care constă în compararea intensităţii luminii a două surse, se poate folosi următorul dispozitiv:

Intr-un suport de lemn *A* (fig. 4) cu dimensiunile de 20/80/120 mm se execută două şanţuri *a* şi *b*. In şanţul *a* se introduce o bucată de geam de 120×200 mm, iar în şanţul *b*, un ecran din placaj sau carton, în care se execută o fantă verticală de 8—10 mm. Şanţurile se execută astfel, încît geamul şi ecranul să intre în ele cu oarecare frecare, fără ca să fie fixate în mod special şi să se menţină paralel între ele. Acest lucru permite păstrarea dispozitivului în stare demontată, ceeace este foarte important din punctul de vedere al economiei de spaţiu.

Din partea interioară, pe geamul de sticlă, se întinde o hîrtie de calc sau hîrtie albă subţire. Sursele de lumină se plasează dealungul unei perpendiculare pe ecran, în aşa fel încât pe geam să se formeze două dungi luminoase. Una din sursele de lumină se deplasează dealungul perpendicularei până ce ambele au aceiaşi luminozitate. Prin deplasarea ei, cele două dungi luminoase pot fi aduse alături. Aceasta permite stabilirea şi mai exactă a egalităţii de luminozitate.

Sursele de lumină trebue alese în aşa fel încît să aibe aproximativ aceiaşi culoare a luminii. In cazul cînd comparaţia se face cu o lumînare care dă o lumină gălbuie, este mai bine să se folosească becuri slabe sau becuri care nu se încălzesc până la incandescenţă (exemplu un bec de 220 v folosit la reţea de 110 V).

Este bine ca observarea luminozităţii dungilor, să se facă din spatele aparatului, pentrucă lumina directă a razelor să nu cadă în ochiul observatorului.

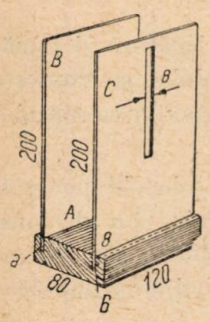


Fig. 4

Dacă ecranul opac, prevăzut cu fantă, se înlocueşte cu un alt ecran prevăzut cu un mic orificiu, dispozitivul poate fi folosit pentru verificarea propagării luminii în linie dreaptă. Drept sursă poate fi folosită o lumînare sau un bec electric, observîndu-se poziţia imaginii filamentului. Dacă se scoate hîrtia de pe ecranul transparent, dispozitivul poate fi folosit pentru lucrarea de laborator «construirea imaginei într-o oglindă plană», folosind geamul de sticlă drept oglindă transparentă.

DETERMINAREA ACCELERAŢIEI LA CĂDEREA LIBERĂ

Pentru a se determina acceleraţia unui corp în cădere liberă, se foloseşte următoarea instalaţie.

De tavan se suspendă cu ajutorul unui scripete un electromagnet blindat, alimentat cu curent dela transformatorul reductor al şcolii. In circuit se montează un întrerupător, care permite întreruperea curentului la momentul oportun. Electromagnetul atrage o bilă de oţel care în momentul întreruperii curentului începe să cadă liber.

Distanţa dela electromagnet la podea sau la masa de demonstraţie, se măsoară cu ajutorul unei rulete. Timpul de cădere a bilei se măsoară cu ajutorul pendulului reprezentat în fig. 5. Pendulul se compune dintr-o bară de fier lat, avînd lungimea de 120 cm. Un disc greu, turnat din plumb poate aluneca dealungul barei şi poate fi fixat în orice punct al ei, cu ajutorul unui şurub. Datorită acestui fapt, se poate varia în limite largi, perioada de oscilaţie a pendulului. Pe pendul sunt fixaţi doi clopoţei de sonerie de telefon şi un tub de tablă în care se rostogoleşte liber, o bilă. Cînd pendulul oscilează, bila loveşte pe rînd clopoţeii şi aceste lovituri se aud bine în clasă.

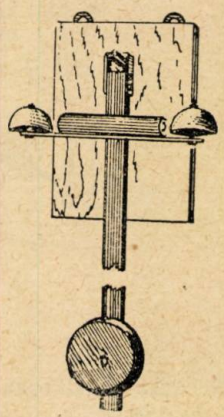


Fig. 5

Experienţa se desfăşoară în modul următor: frecvenţa oscilaţiilor pendulului se potriveşte în aşa fel încît eliberarea bilei de oţel de pe electromagnet să corespundă cu o lovitură în clopoţel, iar momentul în care bila ajunge pe podea sau pe masă, să corespundă cu lovitura următoare.

Pentru determinarea perioadei de oscilaţii a pendulului se măsoară timpul în care acesta execută 50 sau 100 de oscilaţii şi se împarte acest timp, la numărul de oscilaţii. Pentru a economisi timpul la lecţie, poziţia discului pe pendul se potriveşte din timp, înainte de oră. Un astfel de pendul reglat pentru numărarea secundelor poate fi folosit la demonstrarea altor experienţe, la care trebue să se măsoare intervale mici de timp.

PROBLEME — EXPERIENŢE — ÎNTREBĂRI *)

CLASA VI—X **)

VI: 1. Sifonul

Instalaţia. Un tub de cauciuc avînd lungimea de circa 40 cm, înfăşurat cu o sîrmă de fier (diametrul de circa 1 mm) şi îndoit împreună cu sîrma în formă de sifon. Un borcan cu apă şi un mic lighean.

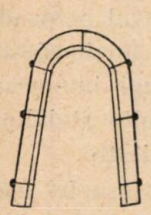


Fig. 1

Condiţiile problemei. Aveţi în faţă (fig. 1) un tub de cauciuc înfăşurat cu o sîrmă de fier pentru ca să poată fi îndoit în diferite feluri; rostul sîrmei este acela de a păstra forma pe care vrem să o dăm tubului. Tubul este îndoit în formă de sifon. Se ştie, că un neajuns esenţial al unui astfel de sifon este următorul: dacă se scoate sifonul din lichid, lichidul se scurge din sifon şi de fiecare dată, înainte de întrebuinţare trebue să se sugă lichidul în sifon.

Ce formă trebue să aibă sifonul pentruca din el să nu se scurgă apa, atunci cînd îl scoatem din apă, menţinîndu-l însă, suspendat şi nu înclinat?

Complectări. 1) Fără a modifica construcţia sifonului, cum se poate regla viteza apei care se scurge din el?

2) Se va menţine oare apa în sifonul scos din lichid dacă se face o ramură mai scurtă decît cea-

*) La aceste probleme de fizică numerotate pe clase se primesc soluţiile dela corespondenţi de orice clasă, indicînd numai numărul problemei fără a mai transcrie enunţul, de exemplu: Soluţia problemei VI, 1, Sifonul.

**) Din volumul «Probleme-experienţe de fizică» de *V. A. Ziber.*

laltă? Trebue să se ţină seama că sifonul are forma pe care o cere problema.

VIII: 1. Mişcare compusă

Instalaţie. 2 bare verticale solid fixate, sau un cadran din lemn (fig. 2). Intre capetele de sus ale barelor (cadrului) se întinde o sîrmă orizontală.

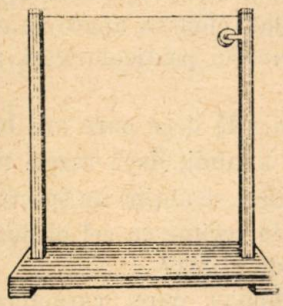


Fig. 2

De bara din dreapta se fixează un mic scripete de lemn, care se foloseşte pentru demonstrarea compunerii forţelor. Un al doilea scripete identic, se află lîngă instalaţie. Afară de aceasta se dau: un mosor de aţă de cusut, o bucată de sîrmă de cupru avînd lungimea de circa 5 cm şi un mic desen de avion fixat pe o plăcuţă de plumb sau pe o altă greutate.

Condiţiile problemei. Pentru un spectacol în cadrul şcolii este necesar de exemplu, ca în desfăşurarea unei piese, un mic model de avion să se ridice pe diagonală dela colţul stîng de jos, al scenei, spre colţul de sus din partea dreaptă. Nu este posibil să se întindă o sîrmă pe diagonală, deoarece ea ar deranja personagiile care joacă în piesă. Atunci se întinde sus, dealungul scenei, o sîrmă orizontală, peste toată scena (nevizibilă publicului), iar în partea dreaptă, se fixează un scripete.
(Schema unei asemenea instalaţii o aveţi în faţă).

Cum se poate realiza cu ajutorul obiectelor date, mişcarea desenului de avion împreună cu greutatea din colţul stîng de jos al cadrului, spre colţul din dreapta de sus, în aşa fel, încît mîna experimentatorului care mişcă desenul, să nu se afle în interiorul cadrului (scenei)?

Complectări. 1) Care trebue să fie raportul dintre lungimea şi înălţimea cadrului, pentru a se putea realiza mişcarea indicată a desenului de avion? 2) Cum se va mişca desenul de avion, dacă lungimea cadrului va fi mai mare decît înălţimea sa? 3) In ce scop se fixează de desenul avionului, o greutate?

VII: 1. Electrizarea corpurilor şi neutralizarea sarcinilor electrice

Condiţiile problemei. Se povesteşte următoarea întîmplare: în sec. XVIII-lea, un bătrîn, după ce a îmbrăcat peste un ciorap de mătase neagră un ciorap de mătase albă, a observat că acesta din urmă este întors pe dos. El a hotărît să-l scoată din picior; însă, oricît s-a străduit n-a reuşit, deoarece în urma frecării, ciorapii s-au electrizat şi s-au lipit unul de altul. Infuriindu-se, el a tras ambii ciorapi şi i-a aruncat de perete. Deoarece ciorapii erau foarte electrizaţi, ei au rămas lipiţi de perete. Care fapte din această poveste sunt în contradicţie cu fizica şi care nu sunt?

VIII: 2. Inerţia

Instalaţia. Două găleţi dintre care una este umplută cu apă iar a doua cu nisip (sau pămînt), a cărui greutate este egală cu greutatea apei.

Condiţiile problemei. Apucaţi găleata cu apă de mijlocul toartei, de exemplu, cu mîna stîngă, iar găleata cu nisip, cu mîna dreaptă; lăsînd coborîte braţele în care ţineţi găleţile, răsuciţi repede mîinile cu găleţile din încheieturi, cînd într-o parte cînd în cealaltă. Găleata cu apă va urma întocmai mişcările mîinilor voastre. Cu cealaltă găleată nu veţi reuşi să faceţi acelaşi lucru.

Dece, cu toate că masa unei găleţi împreună cu conţinutul ei este egală cu masa celeilalte găleţi, prima se răsuceşte uşor într-un sens şi în altul, iar a doua nu?

Complectare. Dacă aveţi două găleţi de fier, una fiind umplută cu apă iar a doua cu mercur, de aceeaşi greutate ca şi apa, efectul va fi oare acelaşi?

VIII: 3. Presiunea lichidelor

Instalaţie. Un vas larg de sticlă umplut cu apă, în care este scufundat un trunchi de con închis în partea de jos cu o placă de sticlă. Pe această placă este aşezat în interiorul trunchiului de con, un cilindru din plumb sau fier, avînd greutatea de circa 0,5 kg. (fig. 3).

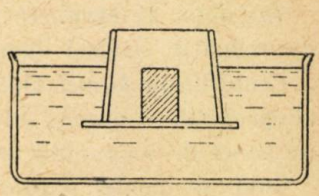


Fig. 3

Condiţiile problemei. Apăsarea cilindrului cu greutatea de 0,5 kg. este insuficientă pentru a desprinde placa de sticlă dela baza trunchiului de con.

Dacă se scoate cilindrul şi se toarnă în trunchiul de con, apă care are deasemenea, greutatea de 0,5 kg se poate întîmpla ca placa de sticlă să se desprindă de pe baza trunchiului de con şi să cadă în fundul vasului.

Dece?

Complectare. 1) Se poate realiza aceeaşi experienţă, turnînd în trunchiul de con 0,5 kg nisip? 2) cum trebue modificată instalaţia pentru ca să aibă loc fenomenul invers: apa turnată în trun-

chiul de con să nu desprindă iar cilindrul de fier, să desprindă placa de sticlă de pe baza trunchiului de con.

IX: 1. Condensarea aburului

Instalaţie. Un balon de sticlă în care se află o foarte mică cantitate de apă. O chiuvetă fotografică mare, umplută cu apă. Spirtieră.

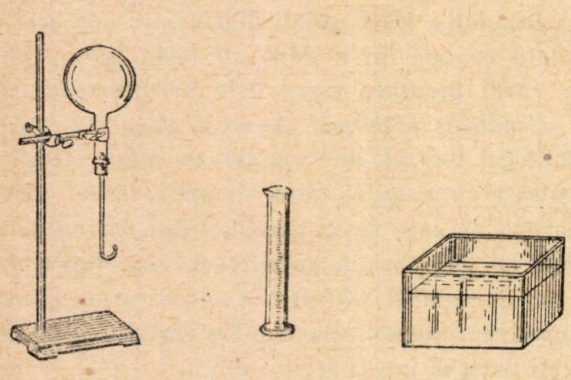


Fig. 4

Condiţiile problemei. Cum se poate introduce apa din chiuvetă în balon, fără a atinge chiuveta?

Complectare. 1) Dece apa intră în balon la început încet, apoi repede? 2) Dece în momentul cînd apa începe să intre în balon se simte un şoc? 3) cum se poate îndepărta apa din balon (după ce a fost umplut) fără a scoate gîtul balonului din apa rămasă în chiuvetă?

XI: 2. Dependenţa frecvenţei oscilaţiilor sonore de lungimea coloanei de aer

Instalaţie. O eprubetă lungă şi una scurtă de aproximativ, acelaşi diametru.

Condiţiile problemei. Dacă aplicaţi capătul deschis al eprubetei pe buze şi suflaţi în eprubetă, ea emite un sunet de o anumită înălţime.

Cum se poate obţine cu ajutorul eprubetei lungi, un sunet de aceeaşi înălţime ca cel produs de eprubeta scurtă?

Dacă pentru rezolvarea problemei aveţi nevoie de ceva, ce nu este prevăzut în «instalaţie», cereţi ceeace vă trebue, tovarăşului profesor.

Complectare. Este oare eprubeta sursa principală generatoare de sunet?

X: 1. Spectrul de absorpţie

Instalaţie. Cilindru de sticlă umplut cu o soluţie saturată de sulfat de cupru. Un ecran alb.

Condiţiile problemei. Luaţi cilindrul de sticlă umplut cu o soluţie saturată de sulfat de cupru, aşezaţi-l pe o masă sau pe pervazul ferestrei în aşa fel, încît să stea în bătaia razelor solare. In spatele cilindrului, aşezaţi ecranul şi deplasaţi-l în raport cu cilindrul, pînă cînd va apare pe el, clar, un spectru cu oarecare particularităţi, al razelor solare.

Explicaţi două chestiuni: 1) dece oare are loc fenomenul de dispersie a luminii, dacă razele nu au trecut prin prismă? 2) dece se obţine un spectru solar care nu coincide în întregime cu cel obţinut cu ajutorul unei prisme de sticlă?

Complectare. 1) Se schimbă oare, caracterul spectrului dacă în cilindru se toarnă apă curată în loc de sulfat de cupru? 2) Cum se schimbă spectrul, dacă în loc de soluţie de sulfat de cupru se toarnă în cilindru o soluţie de sulfat de fier sau o soluţie de bicromat? 3) Ce fel de spectru se obţine dacă în faţa cilindrului cu soluţie de sulfat de cupru se aşează un vas cu pereţii plan-paraleli, umplut cu soluţie de bicromat?

X: 2. Forţa electromotoare de inducţie proprie

Instalaţie. Sonerie electrică de curent continuu cu capacul scos. Soneria este conectată în serie cu un buton (întrerupător) şi o baterie constînd din două elemente galvanice.

Condiţiile problemei. Apăsaţi butonul cu mîna stîngă şi cu 2 degete dela mîna dreaptă udate în apă, căutaţi pe instalaţia soneriei 2 puncte a căror tensiune să dea naştere în degetele aplicate pe ele, la o senzaţie de durere.

Desenaţi schema soneriei şi explicaţi dece are loc fenomenul indicat.

Complectare. 1) Se va schimba oare în experienţa noastră senzaţia fiziologică în cazul reglării întrerupătorului soneriei (în urma învîrtirii şurubului într-un sens sau altul)? 2) Cum depinde senzaţia fiziologică de frecvenţa de întrerupere a curentului electric? 3) Se poate oare aprecia variaţia mărimii f.e.m. de inducţie proprie pe baza senzaţiei fiziologice?

PROBLEME REZOLVATE

Problema 821

Secţiunile braţelor unui tub de sticlă în formă de U sunt egale cu 1 mm² şi 3 mm². Care este diferenţa de nivel a glicerinei din cele două braţe dacă se socoteşte unghiul limită $\varphi = 0$.

Se ia $g = 980$ cm/s² iar tensiunea superficială a glicerinei $\alpha = 65$ dyne/cm.

C. Dragomir
elev Piteşti

Soluţie. Diferenţa de nivel în cele două braţe ale tubului este dată de formula

$$h = \frac{4\alpha (d_2 - d_1)}{\rho g d_1 d_2}$$

unde α este tensiunea superficială, ρ densitatea glicerinei (1,26 gr/cm³) d_1 şi d_2 diametrele secţiunilor:

$$d_1 = \frac{0{,}2}{\sqrt{\pi}} \text{ cm.} \qquad D_2 = \frac{0{,}3463}{\sqrt{\pi}} \text{ cm.}$$

Rezultă:

$$h = \frac{4 \times 65 \times 0{,}1464 \times \sqrt{\pi}}{1{,}26 \times 980 \times 0{,}2 \times 0{,}3464} \text{ cm.}$$

$$h = 0{,}7886 \text{ cm.}$$

Problema 825

Intr'un vas se găseşte un gaz la presiunea de 0,01 mm Hg la temperatura 7°C. Câte molecule se află într'un cm³ de gaz?

* * *

Soluţie. Conform teoriei cinetice, avem:

$$p = nkT$$

de unde:

$$n = \frac{p}{kT} \text{ molecule/cm}^3.$$

Inlocuind

$$p = \frac{0{,}01 \times 1.033 \times 981}{760} \text{ barii}$$

$$k = 0{,}138 \cdot 10^{-15} \text{ (cont. lui Boltzmann)}$$

$$T = 273 + 7 = 280°K$$

obţinem

$$n = 3{,}45 \cdot 10^{14} \text{ mol/cm}^3.$$

Problema 857

Să se construiască triunghiul ABC cunoscând: unghiul A, AC + AB = d şi înălţimea din vârful A.

* * *

Soluţie. Avem:

$$S = \frac{ah_a}{2} = p(p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2},$$

sau

$$\frac{ah_a}{2} = \frac{d+a}{2} \cdot \frac{d-a}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} a^2 + 2h_a a - d^2 \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 0$$

de unde

$$a = -h_a + \sqrt{h_a^2 + d^2 \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2}}$$

a poate fi deci, construit. Cantitatea de sub radical este ipotenuza triunghiului dreptunghic de catete h_a şi $d \operatorname{tg} \frac{A}{2}$.

Problema 858

Se consideră şirul $U_0, U_1, U_2, \ldots U_n$ în care $U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$. Să se calculeze U_n în funcţie de U_0, U_1, n, a, şi b.

* * *

Soluţie. Şirul $U_0, U_1, U_2, \ldots U_n$ constitue o generalizare a şirului lui Fibonacci. Il vom numi şir *Fg*.

1. *a)* Dacă înmulţim toţi termenii unui şir *Fg* cu un acelaşi număr obţinem tot un şir *Fg*:

$$kU_n = kaU_{n-1} + kbU_{n-2}$$

b) Insumînd termenii corespunzători a două şiruri *Fg*, obţinem tot un şir *Fg*:

$$U_n = aU_{n-1} + bU_{n-2}$$

$$V_n = aV_{n-1} + bV_{n-2}$$

$$(U_n + V_n) = a(U_{n-1} + V_{n-1}) + b(U_{n-2} + V_{n-2})$$

c) Corolar. Din *a)* şi *b)* rezultă: (U_n) şi (V_n) fiind două şiruri *Fg*, şirul $kU_n + hV_n$ este tot un şir *Fg*. Invers, dându-se două şiruri *Fg* de bază (U_n) şi (V_n) $\left(\text{astfel ca } \frac{U_n}{U_{n-1}} \neq \frac{V_n}{V_{n-1}}\right)$ orice şir *Fg* poate fi scris: $W_n = kU_n + hV_n$ unde k şi h se vor determina prin ecuaţiile:

$$kU_0 + hV_0 = W_0$$

$$kU_1 + hV_1 = W_1$$

2. Progresia geometrică

$$1, q, q^2, \ldots q^n$$

va fi şir *Fg* pentru valorile lui q date de relaţia

$$q^2 = aq + b \qquad (1)$$

condiție suficientă, ecuația (1) fiind echivalentă cu

$$q^n = aq^{n-1} + bq^{n-2}.$$

Găsim

$$q = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2+4b}).$$

Există deci, două progresii geometrice șiruri Fg.

Scriind cu ajutorul acestor două progresii geometrice ca șiruri de bază, șirul Fg: U_0, U_1, ... U_n vom avea:

$$k + h = U_0$$

$$k \cdot \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} + h \cdot \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} = U_1$$

de unde:

$$k = \frac{(-a+\sqrt{a^2+4b})\,U_0 + 2U_1}{2\sqrt{a^2+4b}};$$

$$h = \frac{(a+\sqrt{a^2+4b})\,U_0 - 2U_1}{2\sqrt{a^2+4b}}.$$

Prin urmare

$$U_n = k\left(\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n + h\left(\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}\right)^n =$$

$$= \frac{[(-a+\sqrt{a^2+4b})\,U_0 + 2U_1](a+\sqrt{a^2+4b})^n +}{2^{n+1}\sqrt{a^2+4b}}$$

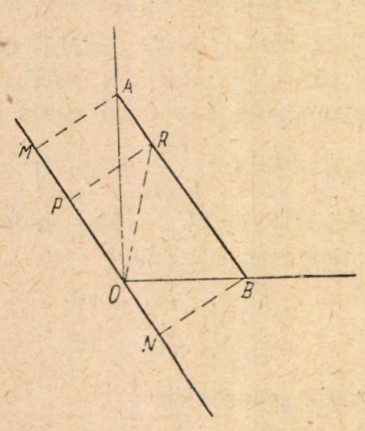
$$\frac{+[(a+\sqrt{a^2+4b})\,U_0 - 2U_1][a-\sqrt{a^2+4b}]^n}{2^{n+1}\sqrt{a^2+4b}}.$$

Aplicație. Pentru $a = b = \frac{1}{2}$ regăsim problema 708:

$$u_n = \frac{[2^{n-1} + (-1)^n]\,u_0 + [2^n - (-1)^n]\,u_1}{3 \cdot 2^{n-1}}.$$

Problema 859

Prin punctele A și B luate pe două drepte perpendiculare, se duc perpendicularele AM și BN pe o dreaptă variabilă ce trece prin intersecția O a



primelor două drepte. Se cere locul geometric al punctului P de pe MN care împarte acest segment într-un raport dat.

I. Loziciu

Soluție. Ducem $PR \perp MN$. Intrucît $AM \| PR\ NB$ avem

$$\frac{PM}{PR} = \frac{RA}{RB} = K.$$

Rezultă că R este fix.

R fiind fix iar $\sphericalangle OPR = 90°$, locul lui P este cercul de diametru OR.

Problema 863

Se dă un triunghi ABC și un punct O. Se notează cu D, E F mijloacele laturilor BC, CA, AB, apoi cu O_1, O_2. O_3 simetricele punctului O față de punctele D, E, F.

1°. *Să se demonstreze că triunghiul $O_1O_2O_3$ este egal cu triunghiul ABC.*

2°. *In cazul particular când O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, ce rol joacă el în triunghiul $O_1O_2O_3$?*

3°. *Să se demonstreze că dreptele AO_1, BO_2, CO_3 sunt concurente.*

* * *

Soluție. In triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ avem $FE = \frac{1}{2}BC$; $FE \| BC$ și $FE = \frac{1}{2}O_2O_3$, $FE \| O_2O_3$. Rezultă $BC = \| O_2O_3$. Analog $AC = \| O_1O_3$, $AB = \| O_1O_2$.

Triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ sunt deci egale și au laturile paralele.

2°. In acest caz OO_1, OO_2, OO_3, sunt respectiv perpendiculare pe BC, AC, AB deci și pe O_2O_3, O_1O_2. O este ortocentrul triunghiului $O_1O_2O_3$. H fiind ortocentrul lui ABC vom avea $AH = OO_1$, $BH = OO_2$, $CH = OO_3$ sau $AH = 2OD$, $BH = 2OE$, $CH = 2OF$, relații cunoscute.

3°. In paralelogramul ACO_1O_3 diagonala CO_3 trece prin mijlocul lui AO_1 iar în paralelogramul ABO_1O_2 diagonala BO_2 trece prin mijlocul lui AO_1. Dreptele AO_1, BO_2 CO_3 sunt prin urmare concurente.

Concurența dreptelor AO_1, BO_2, CO_3 mai este evidentă deoarece triunghiurile ABC și $O_1O_2O_3$ având laturile paralele admite un centru de omotetie care se află la intersecția dreptelor ce unesc vârfurile omoloage.

Problema 889

Fie un triunghi oarecare ABC, iar M și H respectiv mijlocul laturii AB și ortocentrul triunghiului dat. Să se demonstreze relația:

$$AB^2 = 2(CM^2 + MH^2 - HC^2).$$

Gh. I. Bercea

Instytut ... WYMIANA

Soluție. Fie N și P mijloacele laturilor AC și BC, fie R raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Aplicînd teorema medianei în triunghiurile ABC și ABH obținem:

$$AC^2 + CB^2 = 2CM^2 + \frac{1}{2}AB^2$$
$$AH^2 + HB^2 = 2HM^2 + \frac{1}{2}AB^2 \qquad (1)$$

Ținînd seama că

$$CH = 2OM, \quad AH = 2OP, \quad BH = 2ON;$$

avem:

$$2CH^2 = 8R^2 - 2AB^2$$
$$4R^2 - BC^2 = AH^2 \qquad (2)$$
$$4R^2 - AC^2 = BH^2$$

Adunînd (1) cu relațiile (2) obținem relația cerută.

Problema 894

Se dau două cercuri O_1 și O_2 și trei puncte C_1, C_2, C_3 din care ca centre, se descriu 3 cercuri de raze oarecare. Cercul C_1 taie cercul O_1 în A și A' și cercul O_2 în a și a'. Cercul C_2 taie cercul O_1 în B și B' și cercul O_2 în b și b'. Cercul C_3 taie cercul O_1 în C și C' și cercul O_2 în c și c'.

Dreptele AA' și aa' se taie în M; BB' și bb' în N, iar CC_1 și cc' în P. Să se arate că punctele M, N, P sunt pe o dreaptă perpendiculară pe O_1O_2.

St. N. Mihăilescu
student, București

Soluție. In cercurile C_1, C_2, C_3 avem:

$$MA \cdot MA' = M \cdot Ma';$$
$$NB \cdot NB' = Nb \cdot Nb';$$
$$PC \cdot PC' = Pc \cdot Pc'.$$

Rezultă că punctele M, N, P au puteri egale față de cercurile O_1 și O_2. Ele sunt deci situate pe axul radical al cercurilor O_1 și O_2, care este perpendicular pe linia centrelor O_1O_2.

Problema 895

Pe un fluviu sunt două porturi A și B; B este în aval de A. Simultan pleacă două nave M și N; nava M pleacă din A către B, iar nava N pleacă din B către A și se întîlnesc după 20 ore. După un timp cele două nave pleacă în sens invers din porturile finale A și B situate la distanța de 360 km. și se întîlnesc din nou însă la distanța de 40 km. de punctul primei întîlniri. Viteza curentului fiind 1/10 din suma vitezelor navelor iar o milă marină fiind de 1852 m., se cere viteza fiecărei nave în mile pe oră (noduri) și viteza curentului în km/oră.

C. V. Costăchescu

Soluție. Fie x km/oră și y km/oră respectiv vitezele navelor M și N, z km/oră viteza curentului. Vom deosebi două cazuri după cum $x > y$ sau $y > x$. In primul caz vom avea:

$$20(x+z) + 20(y-z) = 360$$
$$\frac{20(x+z) - 40}{y+z} = \frac{20(y-z) + 40}{x-z}$$
$$x + y = 10z$$

de unde

$$x = 10 \text{ km/oră} = 5{,}4 \text{ noduri}$$
$$y = 8 \text{ km/oră} = 4{,}3 \text{ noduri}$$
$$z = 1{,}8 \text{ km/oră}$$

In al doilea caz vom avea

$$20(x+z) + 20(y-z) = 360$$
$$\frac{20(x+z) + 40}{y+z} = \frac{20(y-z) - 40}{x-z}$$
$$x + y = 10z$$

de unde

$$x = 8 \text{ km/oră} = 4{,}3 \text{ noduri}$$
$$y = 10 \text{ km/oră} = 5{,}4 \text{ noduri}$$
$$z = 1{,}8 \text{ km/oră}$$

Problema 897

Să se arate că ecuația $4x^3 - 3x - 8a^4 + 8a^2 - 1 = 0$ este verificată pentru $x = \cos\frac{2b}{3}$ unde $a = \cos\frac{b}{2}$.

A. Mândru
elev, București

Soluție. Ținînd seama de relațiile:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$
$$\cos 4\alpha = 8\cos^2\alpha - 8\cos^2\alpha + 1$$

avem

$$4x^3 - 2x = \cos 2b,$$
$$8a^4 - 8a^2 + 1 = \cos 2b.$$

Problema 904

Un grup de 15 elevi și eleve plecați în excursie, iau masa la un restaurant. Elevii cheltuiesc în total 36 lei, iar elevele cheltuiesc deasemenea 36 lei. Știind că fiecare elevă cheltuiește cu 2 lei mai puțin decât un elev, se cere numărul elevilor și elevelor precum și prețul mesei pentru fiecare.

* * *

Soluție. Fie x, y respectiv numărul elevilor și elevelor; fie z lei prețul mesei pentru un elev. Vom avea

$$x + y = 15;$$

$$xy = 36 \quad ; \quad y(z - 2) = 36$$

de unde

$$(15 - x)\left(\frac{36}{x} - 2\right) = 36$$

$$x^2 - 51x + 270 = 0$$

$x_1 = 45$ (neacceptabilă)

$$x_2 = 6 \text{ elevi}$$

$$y = 9 \text{ eleve}$$

Prețul mesei este de lei 6 pentru un elev și de lei 4 pentru o elevă.

Problema 908

Să se rezolve ecuația trigonometrică:

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

* * *

Soluție. Avem:

$$\sin x + \sin 3x = 2 \sin 2x \cos x$$

$$1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x.$$

Ecuația ia forma

$$2 \sin x \cos x (1 + 2 \cos x) = \cos x (1 + 2 \cos x)$$

sau

$$\cos x (1 + 2 \cos x)(1 - 2 \sin x) = 0$$

de unde

$$\cos x = 0 \quad , \quad \text{deci} \quad x = \frac{4k \pm 1}{2}\pi$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}, \quad \text{deci} \quad x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad , \quad \text{deci} \quad x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}.$$

Problema 909

Intr-un tetraedru regulat $VABC$ se iau mijloacele M și N ale muchiilor VA și BC.

a) *Să se arate că dreapta MN și înălțimea tetraedrului coborîtă din V sunt două drepte situate în același plan.*

b) *Să se arate că dreapta MN este perpendiculară comună a muchiilor VA și BC.*

c) *Să se calculeze sinusul unghiului plan format de două fețe ale tetraedrului.*

* * *

Soluție. a) Înălțimea din V înțeapă planul ABC într-un punct al dreptei AN ($AN \perp BC$). Deci, dreptele MN și înălțimea din V sunt situate în planul VNA.

b) In triunghiurile isoscele ANV și BMC, MN este mediană. Rezultă $MN \perp VA$ și $MN \perp BC$.

c) Unghiul cerut este $\alpha = \sphericalangle BMC$ dat de

$$\cos \alpha = \frac{BM^2 + MC^2 - BC^2}{2BM \cdot MC}.$$

Cum $BM = MC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC$, avem $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ de unde

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Problema 912

O cooperativă are o cantitate dintr-o marfă al cărui preț unitar nu se cunoaște.

Dacă s-ar vinde kg cu 1,80 lei, atunci valoarea totală a mărfii ar fi cu 20 lei mai mare decît valoarea reală. Dacă s-ar vinde cu 1,50 lei kg, valoarea ei ar fi cu 25 lei mai mică decît valoarea reală. Ce cantitate de marfă a avut cooperativa și care este prețul ei unitar.

(Problema se va rezolva aritmetic)

* * *

Soluție. Unei creșteri de preț de $1{,}80 - 1{,}50 = 0{,}30$ lei la kg îi corespunde o creștere de $20 + 25 = 45$ lei pentru întreaga marfă.

Cantitatea de marfă este

$$\frac{45}{0{,}30} = 150 \text{ kg}.$$

Prețul unitar al mărfii este

$$(150 \cdot 1{,}80 - 20) : 150 = 1{,}67 \text{ lei}.$$

Problema 916

In trei vase se află cantități necunoscute de apă. Din primul vas scoatem o treime din apă și o vărsăm în al doilea; apoi din al doilea vas scoatem o pătrime din apă și o vărsăm în al treilea vas; în sfârșit, din al treilea vas scoatem o zecime și o vărsăm în primul vas.

Știind că după aceste operații fiecare vas conține 9 litri de apă, se cere cantitatea de apă conținută la început, de fiecare vas.

* * *

Soluție. (aritmetică). Inainte de a treia operație cele trei vase conțineau respectiv

8 l apă, 9 l apă, 10 l apă.

Înainte de a doua operație ale conțineau

8 l apă, 12 l apă, 7 l apă.

La început cele trei vase conțineau respectiv

12 l apă, 8 l apă, 7 l apă.

Justificarea este evidentă. S'a aplicat metoda retrogradă.

Problema 918

Ox și Oy fiind două drepte perpendiculare, se considera toate dreptunghiurile ABCD care are vârful A pe Ox, vârful C pe Oy și raportul laturilor constant: $AB/BC = k$. Se cere:

a) *Locul vârfurilor B și D.*

b) *Dintre toate dreptunghiurile precedente se consideră acelea care au dimensiuni date. Locul centrelor.*

* * *

Soluție. Intrucât $AB/AC = k$, avem

$$\sphericalangle CAB = \sphericalangle ACD = \text{constant}.$$

In patrulaterele inscriptibile $OACB$, $OADC$ avem:

$$\sphericalangle COB = \sphericalangle CAB = \text{constant și}$$

$$\sphericalangle DOA = \sphericalangle ACD = \text{constant}.$$

Rezultă că B și D descriu segmente respectiv dreptele OB și OD egale în lungime cu laturile dreptunghiului.

b) Fie M centrul dreptunghiului. Intrucât $CM = MA$, în triunghiul dreptunghiu COA, $OM = MA = \frac{1}{2} AC = \text{constant}$. Locul lui M este cercul $O\ (OM)$.

Problema 920

O hidrocentrală (H) trebue să alimenteze cu energie electrică o gospodărie colectivă (G) aflată în acelaș unghi a două șosele perpendiculare ca și hidrocentrala. Alimentarea trebue să se facă prin două stații de transformare A și B care se află pe câte una din cele două șosele. In acest scop, un cablu va lega hidrocentrala cu cele două stații de transformare în conlinuare și apoi, tot în continuare cu gospodăria.

Se cere: a) *Locul așezării pe cele două șosele a celor două stații cu condiția de a face cea mai mare economie de cablu.*

b) *H și G fiind determinate prin distanțele lor la cele două șosele: H (4,2) și G (1,3) să se afle lungimea cablului și unghiurile lui cu cele două șosele.*

c) *Să se generalizeze problema fixându-se pentru H și G poziții generale în unghiul considerat.*

* * *

Soluție. a) Fie H' simetricul lui H față de Ox, G' simetricul lui G față de Oy. Dreapta $H'G'$ va tăia Ox, Oy în A și B.

b) și c) Fie $H\ (a, b)$ și $G\ (c, d)$. Vom avea $H'\ (a, -b)$ și $G'\ (-c, d)$. Lungimea cablului este dată de:

$$H'G' = \sqrt{(a + c)^2 + (b + d)^2}$$

avem $\operatorname{tg}(BAO) = \dfrac{b + d}{a + c}$ și $\sphericalangle ABy = 270° - \sphericalangle BAx$.

In cazul particular $H\ (4,2)$, $G\ (1,3)$ avem:

$$H'G' = 5\sqrt{2},\quad \sphericalangle BAx = \sphericalangle ABy = 135°.$$

Problema 924

Se consideră o placă de sticlă în formă de cerc. Pe o dreaptă perpendiculară pe planul său în centru, sunt situate două surse S_1 și S_2 care emit lumină în toate direcțiile în mod uniform. Fie q cantitatea de lumină emisă pe secundă de fiecare sursă, fie α_1 și α_2 unghiurile sub care se vede din S_1 și S_2 un diametru al plăcii.

a) *ce relație trebue să existe între α_1 și α_2 pentru ca pe placă să cadă pe secundă cantitatea de lumină Q;* b) *știind că unghiul sub care se vede de pe conturul plăcii segmentul S_1S_2 este θ, să se afle α_1 și α_2 și minimul lui Q;* c) *să se discute soluțiile cînd $\alpha_1 = 2\alpha_2$ (Punctele b și c sunt independente între ele).*

* * *

Soluție. a) Vom avea:

$$Q = q\,(\omega_1 + \omega_2)$$

unde ω_1 și ω_2 sunt respectiv, unghiurile solide sub care se vede placa din punctele S_1 și S_2. Cum $\omega_1 = 2\pi\left(1 - \cos\dfrac{\alpha_1}{2}\right)$ steradiani, $\alpha_2 = 2\pi\left(1 - \cos\dfrac{\alpha_2}{2}\right)$ steradiani, rezultă:

$$Q = 2\pi q\left(2 - \cos\frac{\alpha_1}{2} - \cos\frac{\alpha_2}{2}\right) \qquad (1)$$

b) Avem:

$$\frac{\alpha_1}{2} - \frac{\alpha_2}{2} = \theta,\quad \alpha_1 - \alpha_2 = 2\theta.$$

Relația (1) se poate scrie:

$$1 - \frac{Q}{4\pi q} = \cos\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\cos\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \qquad (1')$$

sau

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \arccos\left[\left(1 - \frac{Q}{4\pi q}\right)\sec\frac{\theta}{2}\right].$$

Cunoscînd suma $\alpha_1 + \alpha_2$ și diferența $\alpha_1 - \alpha_2$; α_1 și α_2 se calculează imediat. Intrucît α_1 și α_2 sunt cuprinse între 0° și 180° vom avea $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{4} < 90°$.

Condiția de posibilitate a problemei este deci,

$$0 < \left(1 - \frac{Q}{4\pi q}\right) \sec \frac{\theta}{2} < 1 \qquad (2)$$

Relația (2) ne arată că minimul lui Q este $4\pi q\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)$.

c) Cînd $\alpha_1 = 2\alpha_2$ relația (1′) se scrie

$$1 - \frac{Q}{4\pi q} = \cos\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{3\alpha_2}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\alpha_2 + \cos\frac{\alpha_2}{2}\right).$$

Notăm

$$1 - \frac{Q}{4\pi q} = \frac{1}{2}m \quad \text{și} \quad \cos\frac{\alpha_2}{2} = y.$$

Din $\alpha_1 = 2\alpha_2$ avem

$$\alpha_2 < 90°, \quad \frac{\alpha_2}{2} < 45°, \quad \text{deci} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < y < 1$$

Avem:

$$2y^2 + y - (1 + m) = 0$$

Suma rădăcinilor acestei ecuații fiind negativă, deci numai o rădăcină poate răspunde problemei.

Va trebui să avem

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) f(1) < 0;$$

$$\left(-m + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2 - m) < 0;$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 2; \quad \text{deci}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} < 1 - \frac{Q}{4\pi q} < 1.$$

PROBLEME PROPUSE

1193. Să se elimine x și y din relațiile

$$\sin x + \cos y = a$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = b$$
$$\sec x + \operatorname{cosec} y = c$$

I. Iarovski (Moscova)

1194. Să se rezolve în numere întregi sistemul:

$$2x + 3y - 4z = 10t$$
$$3x - 5y + 2z = t$$
$$x + z = ty$$

Ion Roșca
elev, București

1195. Unghiurile unui triunghi oarecare ABC fiind împărțite în cîte trei părți egale prin dreptele AY, AZ; BZ, BX; CX, CY, a se vedea în R.M.F. pag. 198/1953, rezultă triunghiul echilateral XYZ.

Să se demonstreze relația

$$AZ \cdot CY \cdot BX = AY \cdot BZ \cdot CX.$$

Radu Petrovici
elev, Focșani

1196. Se descriu cercurile ce trec prin ortocentrul H al unui triunghi oarecare ABC și au centrele în mijloacele laturilor.

Să se arate că un cerc de rază R_1 concentric cercului circumscris triunghiului ABC de rază R, taie cele trei cercuri după cîte un diametru.

Intre razele R_1 și R există relația:

$$2R_1^2 = R^2 + OH^2.$$

D. C. Panu,
Galați

1197. Două stele S și S' de declinație cunoscută D și D' sunt văzute la un moment dat dintr-un același plan vertical la distanțele zenitale Z și Z'.

Să se calculeze latitudinea locului de observație.

* * *

1198. Care este viteza maximă v a electronilor care sunt scoși din plumb sub influența radiației caracteristice a fierului.

* * *

1199. O mașină de produs ghiață prin detentă de aer funcționează reversibil între 15°C și −45°C. Să se calculeze în jouli lucrul mecanic minim necesar pentru fabricarea unui gram de ghiață, știind că pentru a se solidifica un gram de apă trebue să i-se ia 80 cal. Dacă mașina are 1 C.P. cîtă ghiață produce pe oră?

(Se va presupune apa la temperatura de 15°C).

Virgil Atanasiu

1200. Două roți dințate sunt angrenate astfel încît cea mai mare are 1954 dinți iar cealaltă roată are numai 180 dinți. Inainte de a se începe mișcarea se trasează cu creta linia dreaptă care trece prin centrele lor. In mișcare centrul roții mari rămîne fix, roata mișcîndu-se numai în jurul axei ei. Roata mică se poate roti și în jurul axei ei dar și în jurul roții mari. In timp ce roata mare se mișcă uniform cu 3 ture, roata mică face două ocoluri în jurul roții mari și în sensul contrar mișcării celei mari.

Se întreabă cîte rotaţii complecte face roata mică în jurul axei sale în timp ce roata mare face o rotaţie complectă?

Cîte învîrtituri complecte face fiecare roată în jurul axei respective pînă ce cei doi diametri trasaţi cu creta, vor fi iarăşi în linie dreaptă.

C. Ionescu-Ţiu

1201. Să se rezolve ecuaţia

$$(\operatorname{tg} x + 2)(1 - \sin 2x) = 1 - \cos^2 x.$$

Gh. I. Bercea

1202. Să se calculeze $\sin(x_1 + x_2)$; $\sin(x_1 - x_2)$; $\cos(x_1 - x_2)$; $\cos(x_1 - x_2)$, unde x_1 şi x_2 sunt două soluţii pozitive cele mai mici ale ecuaţiei $a\cos x + b\sin x = c$.

Florin Torjescu
elev, Ploeşti

1203. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^4 - 4x^2 + 8x - 4 = 0.$$

Se poate face substituţia $x = ay + b$, determinând constantele a şi b ca ecuaţia în y să fie reciprocă şi apoi se rezolvă.

In acest mod rezolvarea unei ecuaţii de gradul IV se reduce la o ecuaţie de gradul al treilea.

Marius V. Iosifescu
elev, Piteşti

1204. Să se arate că raza R a cercului circumscris unui triunghi oarecare în funcţie de razele cercurilor exinscrise r_a, r_b, r_c este dată de relaţia

$$R = \frac{(r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a)}{4(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a)}.$$

Anatolie Mîndru
student

1205. Pentru determinarea coeficientului de dilatare al petrolului se ia un balonaş de sticlă care este cîntărit în petrol la temperaturi diferite. Cîntărirea la temperatura $t = 15°$ a dat pentru masa deslocuită de balonaş $M = 90$ g, iar cea la temperatura $t_1 = 85°$, $M_1 = 84{,}3552$ g. Cunoscînd coeficientul de dilatare cubică al balonaşului $\beta = 0{,}000024$, să se calculeze coeficientul de dilatare cubică al petrolului.

* * *

1206. Înălţimile din vîrfurile A şi B ale unui triunghi oarecare ABC, taie cercul circumscris respectiv în A' şi B'. Paralela la BC dusă prin ortocentrul H taie laturile AB şi AC respectiv în C_1 şi B_1. Dreapta $B'B_1$ taie paralela dusă prin A' la BC în punctul A_2 iar A_2C_1 taie cercul O în D pe arcul AB. Segmentul DB_1 taie latura AB în E iar segmentul $B'C_1$ taie latura AC în F.

Să se arate că: $B'B_1 \cdot C_1F \cdot EH = C_1D \cdot B_1E \cdot FH$.

Nicolae I. Tiţa
student, Bucureşti

1207. Un avion supersonic sboară orizontal, cu viteza de 1440 km/oră la 500 m deasupra solului. La ce depărtare se va găsi avionul de un observator de pe sol în momentul cînd observatorul aude sgomotul avionului?

* * *

1208. Se dă numărul:

$$N = \underbrace{10\ldots0}_{n}\ 64\ \underbrace{0\ldots0}_{n-2}\ m\,s\,z\,u.$$

Să se determine cifrele u, z, s, m, astfel ca numărul N să fie un patrat perfect, numărul zerorilor din cele două grupe fiind n şi $n - 2$.

Dumitru Arcanu
student

1209. Se dă sistemul:

$$x + y + z = xyz = a$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = a^4 - 4a + 2.$$

Se cere:

a) să se rezolve sistemul.

b) să se determine a astfel ca x, y, z să fie în progresie aritmetică.

Mircea Bocu
elev, Oradea

1210. O scîndură de greutate P_1 se mişcă pe un plan orizontal aspru sub acţiunea unei forţe orizontale F. Coeficientul de frecare între scîndură şi plan este f. Pe scîndură se află un cilindru circular omogen, compact, de greutate P_2 care se poate rostogoli pe scîndură, fără alunecare.

Să se determine mişcarea.

* * *

1211. Se dă segmentul AB şi un alt segment CD paralel cu AB. Se cere să se construiască cu linia, un punct P astfel ca $AP = \frac{AB}{5}$.

Marin Uţă
elev, Predeal

1212. Un fir de cupru cu o rezistenţă de 1000 ohmi, este împărţit în trei bucăţi ale căror lungimi sunt proporţionale cu numerele 1; 3 şi 5. Aceste trei bucăţi sunt grupate în derivaţie între două puncte.

— Să se găsească rezistența între cele două puncte.

— Pe firul cel mai scurt introducîndu-se o pilă electrică cu f.e.m. de 1,08 volți, să se calculeze intensitățile curenților ce trec prin cele trei fire.

Willy Paraschiv

1213. Printr-o porțiune de mare, de lărgime $d = 60$ mile marine, se așteaptă să treacă cîrduri de pești, a căror viteză este de $v_0 = 6$ mile/oră.

O cooperativă piscicolă are sarcina de a descoperi cîrdurile de pește; ea are nave de pescuit a căror viteză este de 15 mile/oră. Raza de vizibilitate este de 5 mile ziua și 2 mile, noaptea.

Cîte nave de pescuit vor trebui să cerceteze ziua și cîte nave vor trebui să cerceteze zona, noaptea?

Viteza cîrdurilor se presupune constantă, iar drumul urmat este în linie dreaptă.

1 milă marină = 1852 metri.

C. V. Costăchescu

EXERCIȚII PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI

E: 447. Să se verifice identitățile:

$$(a-b)^2 + (a+1)^2 + (a+b-1)^2 =$$
$$= (a+b)^2 + (a-1)^2 + (a-b+1)^2 ;$$
$$(a-b-1)^2 + (a-b+1)^2 + 2(a+b)^2 =$$
$$= (a+b+1)^2 + (a+b-1)^2 + 2(a-b)^2 .$$

C. I. Ț.

E: 448. Intr-un termostat s-a turnat 100 grame apă la temperatura de 72°C, apoi 150 grame apă la temperatura de 90°C și la urmă, 250 grame apă la temperatura de 98°C.

Să se afle temperatura amestecului.

* * *

E: 449. Să se calculeze apăsarea atmosferică pe suprafața unui corp omenesc dacă barometrul indică 760 mm mercur și dacă suprafața acelui corp omenesc este 1,40 m^2?

* * *

E: 450. Un paralelipiped drept din lemn cu densitatea 0,7, cu muchiile de 28, 32, 80 cm este introdus în apă.

Să se calculeze suprafața care stă în contact cu apa și presiunea apei pe fiecare din fețele aflate în apă, dimensiunea cea mai mică fiind în poziție verticală.

* * *

E: 451. Firul unei mașini electrice de călcat are o lungime de 4 metri și diametrul de 0,8 mm. Curentul ce alimentează mașina are o intensitate de 10 amperi iar conductivitatea firului este de $56{,}81 = \frac{1}{\rho}$, unde ρ este rezistivitatea.

Se cere rezistența electrică a firului și tensiunea curentului la capătul firului.

Willy Paraschiv

E: 452. Pe catetele AB și AC ale unui triunghi dreptunghic se construesc în afara triunghiului, triunghiurile echilaterale ACE și ABF.

Să se demonstreze că aria triunghiului AEF este pe jumătatea ariei triunghiului ABC.

Marius Zaharescu
student

E: 453. Desenați un cerc și luați pe el punctele A, B, C. Paralelele duse prin B și C respectiv la AC și AB intersectează tangenta în A la cercul respectiv în punctele M și N.

Să se demonstreze relațiile:

$$BC^2 = AM \cdot AN \quad \text{și} \quad \frac{MB}{NC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^3 .$$

Mihail I. Popescu
student

E: 454. Să se găsească cel mai mic număr care împărțit cu 3, 5 și 7 să dea același rest 2.

* * *

E: 455. Să se găsească două numere știind că produsul lor este egal cu 6750 și că c.m.m.c.d. al lor este 15.

* * *

E: 456. Doi pionieri pleacă din același loc pe marginea unui rond, ocolindu-l în sensuri contrarii Primul pionier face un tur complect în 7 minute și al doilea în 5 minute. Ei pleacă în același timp și merg împreună 20 minute. După acest timp primul se oprește iar al doilea își continuă drumul încă 18 minute timp după care primul pornește iar la drum păstrînd același sens al mișcării ca și la început, iar după alte 17 minute el se oprește din nou.

Se întreabă, de cîte ori s-au întîlnit în drumul lor cei doi pionieri dacă fiecare și-a păstrat viteza de mers pe care a avut-o la început.

C. I. Ț.

POȘTA REDACȚIEI

(RĂSPUNSURILE PÎNĂ LA 10 FEBRUARIE 1954)

Țene C. Rodian, cl. IX-a, Liceul Tr. Măgurele. S-au primit toate soiuțiile trimise de d-voastră.

Onoiu Filip, cl. IX-a Sinaia. S-au primit problemele și luăm act de angajamentul luat de a fi un bun colaborator la R.M.F.

Oancea Laurențiu. cl. XI-a, Roșiorii de Vede. Pentru reviste mai vechi vă adresați Oficiuiui Special de difuzarea presei, din București, str. Constantin Mille 14, care vi le expediază contra cost.

Unui cetitor semnat indescifrabil. Redacția ține seama de problemele trimise în număr mai mic de cinci. De îndată ce se mai primesc soluții bune și la alte probleme al căror număr împreună cu cele precedente depășesc numărul de cinci, se anunță numele rezolvitorului cu toate problemele rezolvate. Sfătuim pe cetitori să strîngă mai multe soluții și să le trimită cu poșta pe toate, împreună, pentru a nu face cheltuieli cu fiecare expediție în parte.

Cristea Aurel, comuna Boldeștii de sus, raionul R. Sărat. Suntem bucuroși că v-ați înrolat în rîndul colaboratorilor R.M.F. și vă sfătuim să continuați cu perseverență, colaborarea dv.

Kulcsar Ștefan, muncitor elev, Reșița. Am primit rezolvările problemelor ce ați trimis. Problema ce ați propus nu corespunde cerințelor revistei. Continuați să rezolvați probleme și mai tîrziu încercați să propuneți, dupăce veți consolida cunoștințele de matematică.

Stăcescu Angela, cl. IX-a, Piatra Neamț. S-au primit problemele rezolvate pe care le-ați trimis.

Porumb G. Mircea, cl. VI-a, Răcoasa, raionul Panciu. Am luat act de angajamentul pe care l-ați luat; am primit problemele rezolvate.

Cristian I. Gheorghe, cl. X-a, Panciu. Abonamente la Revista Matematică și Fizică se fac numai prin oficiile poștale, la secțiile raionale de difuzare a presei, prin factorii poștali sau prin difuzorii voluntari. — Vom publica în revistă și chestiuni date la admiterea în facultatea de electrotehnică și alte facultăți.

Pantea Octavian, cl. IX-a, Oradea. Vedeți răspunsul dat tov. Cristian I. Gheorghe.

Olariu N. Ionuț, Panciu. Vom mai publica chestiuni date la examene de admitere. In ce privește propunerea de a publica în revistă lecții scurte de matematici superioare care se predau în facultăți, vă răspundem că în planul de publicații pentru revistă, nu intră și astfel de articole.

Cristea I. Ion. cl. IX a, Constanța. Apreciem activitatea ce depuneți în rezolvarea problemelor propuse în R.M.F.; însă, problemele pe care le-ați propus nu corespund toate scopului urmărit de revistă.

Pante Gheorghe, anul II, Giurgiu. Incercați să obțineți sprijinul altor profesori de matematici decît al celui dela școala unde urmați.

Gugonatu Traian, anul III, Școala medie tehnică, Galați. S-au primit problemele rezolvate. Problema propusă nu corespunde scopului revistei.

Bogossy Attila, cl. X-a, Salonta. Pe viitor vă rugăm să trimiteți problemele rezolvate în limba maghiară pe adresa: « Revista Matematică și Fizică (Matematikai es Fizicai Lapok)» — ediția maghiară — Universitatea Bolyai, Cluj, tov. lector Maurer Iuliu, str. Arany Ianoș.

Bărbuică Nicolae, anul II, Școala medie electrotehnică, Craiova. — Problema despre care ne vorbiți nu este deloc « băbească » ea se poate rezolva cu ajutorul cunoștințelor matematice. Problema face parte din categoria problemelor de analiză nedeterminată. In afară de cele două ecuații trebue să se țină seama că rezultatele trebue să fie numere întregi și pozitive. Pentru adîncirea acestor chestiuni privind ecuațiile nedeterminate consultați algebra pentru clasele 8—10 la capitolul respectiv.

Florea Gheorghe, Craiova. Urmăriți continuu publicația noastră, deasemeni citiți și broșurile apărute în « Biblioteca Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R. » și în acest fel veți consolida cunoștințele de matematici. Deasemenea vă pot fi de real folos cărțile de matematică traduse din limba rusă.

Stafler Mihai, Focșani. Studiul matematicilor este folositor și pentru cei ce nu vor urma o carieră legată de cunoștințe matematice; deaceea considerăm că atitudinea dv. este justă. In ce privește întîrzierile în apariția revistei cauzele sunt mai multe, între care unele sunt legate de greutăți tehnice.

Bogdanovici Smaranda, cl. X-a, Cîmpina. Pentru a cunoaște condițiile de înscriere la examenul de admitere la facultatea de chimie industrială, adresați-vă Institutului Politehnic, Calea Griviței 132, București.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME

Soluții primite pînă la 1 ianuarie 1954

(Urmare)

PREDEAL. Uță G. Marin (1030 33, 35, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 44, P), Vereș Eugen (824, 826, 853, 888, 900, 948, 1033, 1037, 1038, 40, 42, 65, 68, 69, E: 292, 305, 335, 344, 349).

RÂMNICUL SĂRAT. *Școala pedagogică fete.* Neicu Ioana (787, 944, 1007, E: 305, 316, 358).

RÂMNICUL VÂLCEA. Liceul de băieți. Clasa XI-a. Liță I. Constantin (872, 873, 874, 888, 915, 917, 926, 927, 971, 999, 1001), Zigulescu Marin (881, 888, 931, 933, 948, 962, 1000, 2, 12, 18).

ROMAN. Clasa VI-a. Bonteanu Doina (E: 310, 311, 314, 353, 354), clasa VIII-a. Florea V. Marilena (871, 873, 876, 904, 937, 971, 999, 1068), clasa IX-a. Gavriluț P. Mihai (823, 824, 837, 945, 854, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 904, 905, 906, 907, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 935, 937, 938, 941), Constantin C. Stoica (882, 906, 921, E: 358, 361), Juncu Gelu (841, 865, 869, 870, 871, 872, 929), Lupovici Sala (800, 823, 871, 872, 873, 875, 904, 905, 907, 911, 912, 913, 915, 916, E: 279, 280, 286, 292, 294), Spătaru C. Alexandru (834, E: 318, 323, 324, 335), clasa X-a. Mihăilă M. Ieronim (A: « Sistemul nostru planetar »; 838, 850, 861, 864, 865, 869, 872, 873, 874, 878, 879, 882, 901, 904, 905, 906, 912, 913, 915, 916, 918, 920, 925, 927, 928, 937, 938, 939, 940, 942, 943, 944, 954, 957, 971, 972, 974, 988, 993, 999, 1000, 4, 18, 61, 65, 68, 73, 78, E: 290, 293, 294, 300, 301, 306), Olaru Elena (1038, 40, 42, E: 339, 341, 344, 349, 350, 351); clasa XI-a. Cojocaru Vasile (800, 804, 806, 838, 841, 904, 912, 916, 946, 950, 954, 957, 968), Mitrofan Gheorghe (810, 878, 905, 908, 909, 915, 916, 925, 927, 930, 937, 938, 939, 940, 942, E: 305, 308, 309, 310, 311, 312, 314). *Școala medie tehnică* anul II. Bacalu Ioan (845, 871, 873, 904, 905, 913, 915, 916, 919, 926, 928, 930, 938, 971, 973, 974, 978, 979, 984, 993, 1000. 2).

ROȘIORII DE VEDE. Clasa VII-a. Noica St. Mihail (E: 355, 357, 359, 360, 361).

SATU MARE. Clasa IX-a. Pop Pavel (1005, 14, 42, E: 325, 329, 330, 335), Chilințan Octavian (823, 1018, E: 285, 330, 335).

SIBIU. Clasa XI-a Zorilescu Dan (1030, 37, 44, 55, 65, 68, 69, 76, 79, 81, 82). *Școala medie de măsurători terestre.* Anul II. Doboș Horațiu (1065, 68, 69, E: 335, 361); anul III. Samoilă Mircea (1065, 68, 69, 73, E: 401).

SIGHIȘOARA. Clasa X-a. Capesius Ingrid (1066, 68, 69, 81, E: 312, 358, 365); clasa XI-a. Ilea Gheorghe (822, 867, 868, 878, 904, 906, 908, 910, 923, 940, 946, 950, 1009, 40, 42, 65, 69, 70), Wagner Dieter (1028, 29, 32, 38, 40, 42, 44, 54, 63, 65, 68, 69, 78, 79, 80, 81).

SLATINA. Clasa VII-a. Popescu Olimpia (E: 292, 294, 305, 306, 313, 314, 358, 361, 362); clasa IX-a. Ursu Gh. Mihai (E: 271, 304, 305, 306, 328, 329); clasa X-a. Popescu I. Clement (881, 950, 1033, 38, 40, E: 313, 358, 361, 362), Teculescu Vasile (815, 816, 834, 872, 873, 901, 905, 911, 913, 938, E: 281, 293, 305, 306, 339, 348), Zamfir C. Vasile (835, 872, 873, 875, 904, 905, 910, 911, 912, 915, 937, 938, 972, 1018, 40).

SUCEAVA. Clasa IX-a. Mândicescu C. Gheorghe (838, 905, 916, 1069, 78, E: 279, 280, 281, 285, 289, 308, 309, 311, 328, 353, 355, 361), Moroșan Dumitru (1065, E: 309, 311, 335, 336, 343, 358, 360, 362), Rotaru Constantin (827, 834, 905, 910, 913, 916, 919, 923, 925, 929, 934, 971, 1001, 33, 65, 69, 78, 79, 81, E: 290, 298, 299, 300, 209, 313, 315, 317, 320, 321, 322, 331, 336, 353, 355, 358, 360, 361, 362, 364, 365); clasa X-a. Budai Teodor (816, 822, 826, 837, 838, 842, 863, 871, 878, 879, 888, 905, 906, 907, 910, 912, 913, 915, 916, 919, 974, 977, 979, 986, 988, 999, 1000, 1, 33, 38, E: 299, 301, 304, 308, 313, 314, 315, 317, 318, 320, 322, 325, 327, 328, 330, 331, 332, 333, 336, 334, 346, 351, P), Cazachevici Gheorghe (816, 822, 823, 826, 834, E: 279, 280).

TÂRGOVIȘTE. Clasa VII-a. Filip M. Stelian (E: 304, 306, 309, 365, 368, 392); clasa VIII-a. Mihăescu Cristian (813, E: 277, 278, 289, 292, 293,); clasa IX-a. Galațki Gheorghe (883, 944, 948, 950, 952, 958, 959, 962, 971, 972, 973, 974, 976, 984, 985, 986, 987, 988, 988, 982, 993, 994, 998, 999, 1000, 1, 3, 7, 11, 18, 25, 31, 37, 38, 40, 41, 43, 71, 78), Brebente Cornelia (823, 871, 872, 873, 874, E: 256), Stoian I. Gheorghe (835, 895, 941, 950, 968, 971, 985, 986), Tache Ștefan (838, 842, 845, 847, 853, 859, 950, 956, E: 294); clasa X-a. Popa Lucian (836, 837, 839, 950, E: 290, 291); clasa XI-a. Gurescu Nadia (863, 904, 906, 908, 910, 923, 946, 950, 954, 955).

TÂRGUL JIU. Clasa VIII-a. Amzulescu Liana (1068, E: 286, 351, 358, 362, Costinscki Dragoș (1028, 68, 78, 81, 84, 94), Surbin Grigore (950, 1025, 42, 43, 61, 68, 65, 79, E: 339, 358); clasa XI-a. Crăciun V. Constantin (1012, 25, 43, 62, 65, 68, 70, 78, 80, 81).

TÂRGUL MUREȘ. Clasa VIII-a B. Hegedua Attila (E: 305, 309, 311, 354, 358); clasa X-a. Cioreanu I. Constantin (904, 906, 913, 938, 950, 964, 971, 974, 1038, 68, 69, 78), Moisoiu Adrian (916, 950, 971, 974, 999, 1038, 62, 69, 78, E: 294, 305, 324, 335, 336, 346, 348, 350, 357, E: 358); clasa XI-a. Bunica M. Octavian (812, 816, 822, 831, 834, 841, 845, 853, 861, 870, 874, 875, 878, 904, 905, 906, 908, 910, 913, 915, 916, 937, 938, E: 290, 291, 293, 295, 298, 300), Pupăză Neculae (807, 812, 813, 814, 816, 819, 821, 822, 832, 824, 825, 826, 827, 831, 834, 837, 839, 840, 841, 842, 850, 852, 853, 878, 880, 881, 882, 904, 906, 908, 910, 914, 915, 921, 923), Matei Nicolae (816, 822, 826, 831, 837, 842, 845, 850, 853, 863, 864, 870, 876, 881, 882, 888, 906, 907, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 923, 937, 938, 940, 942, 944, 946, 950, 954, 964, 971, 972, 973, 974, P).

TÂRGUL NEAMȚ. Clasa VIII-a. Focșeneanu Ioan (E: 301, 302, 303, 304, 305, 306, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314).

TECUCI. Clasa X-a. Corban Adrian (956, 973, 1014, 35, 62, 68, 69, 78, 79, 80, 81, E: 338, 353, 355, 358, 359, 360, 362, 364, 365, P), Lupașcu Aurel (1068, 69, 78, 81, E: 353, 358, 360, 362, 363, 364, 365), Morozan Teodor (831, 834, 835, 837, 841, 882, 940, 964, 968, 993, 996, 1033, 38, 48, 58, 62, 63, 65, 68, 69, 78, 79, 80, 81, 82); clasa XI-a. Flueraru Constantin (831, 835, 841, 863, 864, 872, 875, 878, 888, 910, 940, 950, 971, 972, 973, 974, 975, 1002, 42, 65, 68, 78, 79, 81, E: 281, 286, 329, 335, 365), Palade Marin (831, 835, 871, 872, 878, 888, 904, 905, 910, 915, 938, 999, 1025, 33, 38, 42, 68, 78, E: 289, 303, 304, 305, 306, 309, 329, 335, 358, 364, 365), Traian Grigore (835, 873, 888, 904, 974, 1042, 78, 79, E: 279, 306, 361), Turcanu Ion (814, 835, 840, 848, 868, 872, 878, 879, 881, 885, 888, 902, 906, 915, 931, 938, 940, 947, 950, 964, 976, 992, 1025, 33, 38, 40, 68, 78, 79, 80, P).

TIMIŞOARA. Liceul Nr. 1. Clasa VII-a B. Mihăileanu N. Constantin (E: 279, 294, 296, 318, 327); clasa VIII-a A. Arsenovici Tiberiu (823, E: 276, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 286); clasa XI-a. Rachici Budimir (1022, 23, 25, 40, 42); *Liceul de fete.* Clasa VII-a. Hapuri Margareta (E: 328, 346, 347, 354, 355); *Şcoala pedagogică.* Marincu Aureliu (1069, 78, E: 346, 349, 351, 358), Mănescu Răsvan (818, 878, 888, 904, 929, 1007, 29, 40, 42, E: 279, 281, 289, 290, 292, 305, 306, 307, 327, 335, 341, 344, 349, 350, 358, 368); anul III. Mettler Martin (874, 875, 876, 1069, 78, E: 343); *Şcoala medie tehnică:* anul IV. Fuia Hristu (819, 823, 878, 888, 904, 929, 1007, 29, 40, 42, 69, E: 279, 281, 289, 290, 292, 305, 306, 307, 327, 335, 341, 344, 349, 353, 358, 360, 368, P).

TURDA. Clasa VII-a. Rusu Gheorghe (E: 286, 292, 294, 306, 335).

TURNU MĂGURELE. Clasa IX-a. Mitrică C. Ioan (904, E: 292, 304, 306, 312, 335, 349, 358, 365), Petre Stefan (904, E: 292, 305, 306, 318, 335, 344, 351, 358); clasa X-a. Rey Vasile (878, 908, 929, 1011, 59, 68, 79, 81, E: 358), Zătreanu P. Corneliu (873, 907, 1011, 20, 38, 78, E: 336, 358); clasa XI-a. Dragomirescu Elena (923, E: 312, 358, 362, 364), Popescu Natalia (1068, 69, 70, E: 336, 358, 362, 364, 365).

TURNU SEVERIN. Clasa IX-a. Surdulescu Radu (904, 938, 972, E: 306, 314, 318, 324, 327, 335, 358); clasa X-a. Istrătescu I. Vasile (879, 888, 904, 906, 911, 913, 921, 923, 927, 938, 946, 1033, 66, 68, 69, 70, 78, 82, E: 304, 306, 349, 350, 355, 361, 367, 368); clasa XI-a. Cotorogea C. Dan (950, 1020, 25, 38, 42, 43), Stoian Aurel (870, 904, 910, 915, 923, 938, 950, 971, 972, 974, 999, 1038, 65, 68, 69, 78, 79, 81, E: 306, 309, 338, 358, 361, 363, 364, 365), Gârjoabă C. Gheorghe (878, 904, 906, 908, 915, 923, 938, 971, 972, 974, 992, 999, 1000, 1, 33, 38, 68, 69), Ariciu Gh. Mihai (872, 873, 972, 1038, 68, 69, 78, 81), Pîrjan D. Constantin (876, 879, 888, 904, 910, 913, 915, 932, 927, 938, 960, 972, 974, 999, 1038, 65, 68, 69, 78, 79, 81, E: 306, 309, 335, 341, 358, 361), Pârvulescu Emil (850, 878, 888, 900, 910, 911, 912, 921, 950, 971, 1025).

VASLUI. Clasa VI-a. Stănescu I. Viorica (E: 266, 306, 317, 322, 328); clasa IX-a. Stănescu I. Viorel (823, 871, 872, 873, E: 280, 287, 291, 294, 328, 341); clasa X-a. Bostan Gh. Emil (1038, 65, 68, 69, 78, 81, P).

ZALĂU. Clasa X-a. Hodiş Gh. Gheorghe (923, 992, 1018, 33, 40 78, 81, 82, E: 288, 330, 335, 343, 345, 347, 349, 350, 351, 361).

EVIDENŢIAŢI

In cursul lunii Decembrie 1953 s-au evidenţiat următorii rezolvitori de probleme:

Buzuloiu Vasile (clasa X-a, Oradea), Donescu St. Dragomir (clasa XI-a, Focşani), Pandrea Nicolae (clasa X-a, Focşani), Mihăilă I. Ieronim (clasa X-a, Roman), Petrică Zamfira (clasa X-a D, Liceul 2—10—13 fete, Bucureşti), Galaţki Gheorghe (clasa IX-a, Târgovişte), Torjescu S. Florin (clasa XI-a, Ploeşti), Budin I. Constantin (clasa XI-a, Predeai), Herşcovici Iosif (clasa X-a, Iaşi), Nan Stelian (clasa XI-a, Oraşul Stalin), Minuţ Petru (clasa X-a, Piatra Neamţ), Vulpescu Dumitru (clasa XI-a, Ploeşti), Ianuc I. Corneliu (clasa X-a, Focşani), Uţă G. Marin (clasa XI-a, Predeal), Tofan I. Ionel (clasa XI-a, Bacău), Răileanu Gheorghe (anul III, şcoala medie de Construcţii, Câmpulung Moldovenesc), Matei Nicolae (clasa XI-a, Târgu-Mureş), Săsărman Ioan (clasa XI-a, Predeal), Alexa Ioan (clasa XI-a, Predeal), Pristavu Ion (clasa XI-a, Piatra Neamţ), Dabija Sorin (clasa XI-a, Galaţi) Andreescu G. Radu (clasa X-a, Liceul de băieţi 10, Bucureşti), Vrăjitoru Dan (clasa IX-a, Aiud), Gavriluţ P. Mihai (clasa IX-a, Roman), Pupăză Nicolae (clasa XI-a, Târgu Mureş), Răzuş Alexandru (clasa XI-a, L. b. 9, Bucureşti), Turcanu Ion (clasa X-a, Tecuci), Petcu I. Dumitru (clasa XI-a Giurgiu), Arsintescu Virgil (clasa X-a, Iaşi), Fotă M. Stan (clasa XI-a, Giurgiu), Budai Teodor (clasa X-a, Suceava), Cazanacli P. Nicolae (clasa XI-a, L. B. 2, Craiova), Apostu I. Gheorghe (clasa XI-a, Predeal), Tănase Dumitru (anul III, Măsurători terestre, Bucureşti), Dumitru V. Constantin (clasa XI-a, Focşani), Coman Gheorghe (clasa XI-a, Predeal), Tofan Liliana (absolventă, Codlea, Regiunea Stalin), Bunica M. Octavian (clasa XI-a, Tîrgu-Mureş), Miu Gh. Filipoiu (student, Curtea de Argeş), Bacalu Ion (anul II, Şcoala medie tehnică, Roman), Vasilescu Aurel (clasa IX-a, Călăraşi), Ionescu Ion (clasa IX-a, Constanţa), Morozan Teodor (clasa X-a, Tecuci), Flueraru Constantin (clasa XI-a, Tecuci), Mureşan Traian (clasa X-a, Baia Mare), Oproiu Cornel (clasa VII-a, Petroşani-Piteşti), Dogaru T. Mihai (clasa XI-a, Ploeşti), Săraci Dumitru (clasa X-a Piteşti), Butenco Igor (clasa X-a, Oraşul Stalin), Steinberg. V. Victor (clasa XI-a, Predeal), Baieră Bogdan (clasa X-a, Focşani), Ilie Torsan (clasa XI-a, Predeal), Huştiuc Nicolae (clasa XI-a, Predeal), Iliescu C. Florian (clasa XI-a, L.B.1, Craiova).

* * *

Până la 15 Februarie 1954 s-au primit cel puţin cinci soluţii bune la problemele din ultimele şase numere ale Revistei Matematice şi Fizice, dela rezolvitorii la care sunt trecute numerele problemelor rezolvate după numele fiecăruia, probleme propuse (P), articole (A) şi note (N), după cum urmează:

AIUD. Clasa VI-a. Vrăjitoru Mihai (E: 316, 324, 370, 376, 379, 382, 384, 385, 387, 389, 391, 392, 395, 398, 400); Clasa IX-a. Vrăjitoru Dan (841, 944, 954, 977, 978, 983, 986, 987, 988, 989, 1020, 25, P).

ALBA-IULIA. Clasa X-a. Ioan Mihai (882, 888, 916, 923, 930, 937, 938, 940, E:312, 313, 314, P), Şincu Iacob (950, 971, 972, 973, 974, 976, 1068, 1078, 1079, 1084).

ARAD. Clasa IX-a. Oniţă St. Aurel (906, 934, 959, 962, 999, 1000, 1, 2, 3, 13, 84, 96, P).

BACĂU. Clasa V-a. Postolache Dan (E: 346, 351, 353, 354, 357, 369, 376). Anul III. Stanciu Pavel (1063, 68, 69, 84, 94, E: 381), Clasa IX-a. Iorga Sergiu (973, 976, 1084, E: 356, 358, 362, 369, 370, 371, 372, 373, 378, 381, 382), Joie Puiu (1038, 65, 84, E: 353, 358, 360, 362, 370), Mălinici Mircea (1065, 68, 69, 70, 84, 92, E: 354, 361, 371, 377, 379, 380, 381), Merticaru Vasile (906, 913, 923, 938, 940, 1038, 78, 80, 81, 84, 98), Palaghiţă I. Ştefan (871, 872, 1065, 68, 69, 78, 81, 84, 98, E: 350, 361, 362, 370), Romeda Adrian (E: 305, 306, 353, 355, 358), Tofan V. Vasile (871, 872, 873, 904, 906, 912, E: 305 306, 358, 362), Ţigăeru Gheorghe (904, 905, 906, 913, 1038, E: 293, 294, 296, 300, 304, 312, 323, 324, 327, 339, 342, 343, 370, 378), Clasa X-a. Bocăneţ Gheorghe (1042, 65, 68, 69, 78, 79, 81, E: 354, 355, 358, 361, 365), Bantaş Aurel (1042, 65, 78, E: 339, 346, 353, 358, 365, 381), Chirion Gheorghe (1065, 69, 84, E: 358, 361, 370, 371, 373, 375, 382), Rosenfeld Sergiu (856, 908, 923, 1065, 81, 84, 93, 98, E: 361, 373, 378), clasa XI-a. Neacşu Octavian (871, 872, 973, 904, 906, 913, 923, 1078, 82, 84, 98), Savin Neculai (1065, 69, 81, 84, E: 358, 361, 362), Tofan V. Ionel (982, 1009, 23, 35, 43, 48, 54, 55, 58, 59, 60, 62, 65, 66, 68, 69, 70,

72, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 91, 93, 95, 96, 98, 105, 106, 111, 113).

BAIA-MARE. Liceul mixt, clasa X-a. Pop Gheorghe (945, 1054, 57, 61, 63, 84, 85, 86, 98, 102, 104, 106, 111, 114).

BÂRLAD. Clasa VIII-a. Ghidoveanu Ilie (836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844), Popovici St. Nicolae (871, 873, E: 290, 313, 335, 358, 370, 372, 373, 377, 381, 382), clasa X-a. David Maria (1054, 55, 57, 58, 61, 62, 63, 68, 69, 70, 84, 85, 87, 97, 98, 102, 106, 113).

BĂICOI (Ploeşti). Sondor. Jilăveanu S. Gheorghe (937, 939, 941, 971, 972, 976, 988, 989, 999, 1001, 3, 4, E: 294, 295, 303, 305, 307, 309, 311, 312, 314, 315, 317, 318, 322, 326, 330, 337, 338, 344, 346, 347, 352, 353, 358, 367, 368, 369, 370).

BOTOŞANI. Şcoala medie de şapte ani, Bucecea, clasa V-a. Baciu Luciea (E: 290, 309, 310, 320, 354), Iliuţă Maria (E: 309, 310, 354, 370, 379), Ionescu Doina (E: 309, 310, 330, 332, 354, 376, 382), Radu Ana (E: 290, 309, 310, 330, 354); clasa VII-a, Cosovschi Ana (E: 305, 306, 309, 318, 358), Goldenberg Hinda (E: 290, 305, 306, 309, 310), Ionescu Cristina (E: 305, 306, 309, 310, 318, 341, 351, 353, 354, 355, 356, 358, 359, 361, 362, 366, 370 371, 373, 376, 378, 379, 380, 381, 382), Ionescu Nicolae (E: 291, 306, 310, 354, 370); Şcoala medie textilă, anul II. Anton Maria (946, E: 305, 306, 349, 358), Avădani Gerşen (E: 304, 305, 309, 312, 324), Horodinschi Elena (878, E: 305, 306, 358, 375), Cojocaru Idel (946, E: 305, 306, 312, 324), Mocanu Ştefan (1069, E: 304, 305, 306, 309, 314), Mălinescu Maria (E: 303, 305, 306, 358, 382), Schwartz Eva (1065, E: 304, 305, 306, 309, 341), Ţenker Aurel (878, 946, E: 304, 305, 306, 309), Weinstein Bero (878, 946, E: 304, 305, 306); anul III, Gartenberg Pavel (E: 304, 305, 309, 312, 341) Păduraru Paţica (878, E: 292, 304, 305, 306, 358), Prisecaru Despina (E: 294, 298, 305, 306, 309, 335, 341), Rosner Iosif (E: 305, 306, 341, 350, 351); anul IV, Turcuman M. (878, E: 295, 305, 306, 338, 346, 351, 938, 364, 365, 369, 371, 383). Şcoala medie tehnică de drumuri şi poduri, anul I. Bercovici Ali (E: 305, 335, 353, 370, 379, 382), Mahatu Clara (E: 291, 316, 353, 358, 371), Onofrei Mircea (873, E: 305, 306, 335, 355, 370, 382), Hurduc Minodora (E: 268, 271, 353, 357, 358, 368, 370, 371, 373, 379, 382), Fodor Dragoş (E: 305, 306, 324, 335, 370, 382), Pincovici Marcel (E: 305, 355, 370, 379, 382), Piram Amalia (E: 303, 306, 353, 355, 358), Popescu Gheorghe (E: 305, 306, 321, 335, 370, 382), Rebei Dumitru (E: 305, 306, 321, 355, 358, 370, 382), Rottemberg Martin (E: 305, 353, 355, 370, 382); anul III, Izu Rosentzveig (904, 906, 915, 938, E: 325, 335); anul IV, Zmeu Petru (876, 1065, 68, 78, 84, E: 292, 294). Liceul de fete, clasa IX-a, Schwartz Mina (E: 356, 358, 365, 370, 371, 373, 382), Vamanu Elena (1069, 84, 88, E: 370, 380, 381), Witting Miriam (E: 344, 350, 358, 370, 371, 373, 381); clasa X-a. Avram Lucia (1078, 79, 80, 81, 84, 106), Casianov Eugenia (1078, 79, 80, 81, 82, 84, E: 279); clasa XI-a. Bălan Veronica (1084, 85, 87, 88, 89). Liceul de băieţi, clasa IX-a. Ionescu N. Mihai (1019, 62, 65, 93, 98, E: 339, 370, 373, 378, 389), Vartolomei Mihai (1066, 69, 99, E: 353, 354, 358, 370), Ştefan Vasile (1068, E: 358, 362, 364, 365, 368); clasa X-a. Bălan Sergiu (1038, 84, E: 358, 360, 378), Butnaru Strul (905, 910, 913, 942, 950, 954, 1065, 68, E: 337, 346, 358), Grünberg Paul (E: 356, 362, 365, 370, 372, 373), Leanu Alexandru (863, 905, 1078, E: 313, 324, 358, 362), Merches Ioan (909, 1033, 38, 84, E: 339, 360, 378, 381), Rabinovici Leonard (904, 937, E: 305, 306, 313, 324); clasa XI-a. Iluc Florin (905, 913, 916, 917, 929, 946, 950, 954, 1076, 84, 87), Modreanu Mircea (871, 872, 873, 875, 910, 916 917, 946, 950, 954, 1065, 78, 84, 87, 88), Schor Bernard (908, 909, 913, 923, 938, 940, 942, 950, 974, 1065, 78, 79, 84), Schwartz Tilly (1065, 69, 79, 84, E: 358, 361).

BRĂILA. Şcoala medie tehnică de energie electrică, anul III. Lungu C. Ştefan (957, 966, 968, 970, 971, 972, 973, 975, 989, 1001, 3, 31, 49, 73, 88, 102, 103, 106, 107, 110, 114, E: 339, 344, 352, 353, 357, 358, 363, 364, 365, 368, 369, 370, 371, 372, 374, 382, 383, P).

BRĂNEŞTI. Pucioasa, Ploeşti. Clasa VII-a. Fejer Gabriela (E: 310, 315, 328, 330, 331, 335, 354, 357, 368, 367, 382); clasa VIII-a, Bucur D. Gheorghe (882, 944, E: 312, 325, 335, 337, 338, 345, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 364, 365, 369, 370, 371, 373).

BUCUREŞTI. Liceul 1 fete. Clasa V-a Sălăgeanu Simiona (E: 306, 310, 311, 330, 352, 354, 387, 389, 398). Clasa IX-a. Sălăgeanu Adriana (1062, 74, 75, 139, E: 335, 355, 362), Clasa X-a. Cruceanu Viorica (901, 1011, 25, 38, 40, 53, 55, 62, 65, 68, 69, 78, 79, 80, 81, 82), Filimon Rodica (900, 1011, 53, 55, 65, 68, 84, 87, 88, 98); Liceul 2—10—13 fete, clasa VII-a. Ciotron Irina (E: 370, 371, 373, 375, 376, 378, 382), Ivan Alexandra (E: 370, 371, 373, 375, 381, 382), Ivănceanu Tatiana (E: 370, 371, 373, 375, 376, 380, 381, 382), Buttu Mariana (E: 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 381, 382, 383), Butoi Mihaela (E: 370, 371, 373, 380, 381, 382), Petrescu Viorica (E: 370, 373, 379, 381, 382) Şerbănescu Ilinca (E: 370, 373, 379, 380, 381); clasa X-a, Gongea Valentina (872, 873, 904, 938, 950, 1079, 80, 82). Ulmeanu V. Aurelia (974, 1078, 84, E: 327, 333, 338, 346, 352, 356, 370, 371, 375, 377, 379, 380, 381, 389, 391, 398), Wechsler Henriette (923, 929, 972, 992, 993, 1025, E: 324); clasa XI-a, Ianache Veronica (950, 959, 1038, 40, 43, 58, 65, 68, 69, 76, 98), Nestor M. Elena (946, 959, 1033, 35, 39, 40, 43, 62, 65, 68, 69, 70,78, 79, 80, 81, E: 339). Liceul 4 fete, clasa IX-a. Iancu Elisabeta (986, 999, 1053, 62, 68, E: 342, 343, 353, 354, 358, 361, 378). Liceul 12 fete, clasa VIII-a. Ioana Clondescu (872, 873, E: 304, 355, 358, 359). Şcoala de 7 ani Nr. 11 fete, clasa V-a. Păduret Victoria (E: 359, 354, 368, 370, 371, 374, 335). Şcoala de 7 ani Nr. 43 fete, clasa VII-a, Mărăndici Elena (E: 337, 345, 346, 347, 351, 354, 355, 357, 358, 365, 368, 369, 370, 371, 372, 374, 375, 376, 379, 382, 383). Şcoala medie de statistică, anul II. Popescu I. Mariana (E: 344, 349, 347, 351, 355). Şcoala de hidrometeorologie, anul III, Maria Stăvrache (E: 303, 305, 306, 329, 341). Liceul 1 băieţi, clasa VIII-a. Marinescu Cătălin (950, 962, 996, 1025, 33, 58, 69, 84, 88), Schileru I. Dinu (1064, 84, 98, 102, 106, E: 337, 356, 358, 361, 362, 365, 370, 371, 373, 378, 382, P); clasa X-a. Litinschi Mihai (946, 1029, 81, 84, 85, 98, 99, E: 342, 356, 362, 364, 365, 370, 371, 373, 378, 380), Mieiţă Cristea (813, 837, 839, 842, 863, 904, 905, 906, 908, 910, 923, 950, 972, 999, 974, 1084, 98, E: 353, 358, 362, 365), Nicolae St. Alexandru (808, 824, 857, 864, 867, 868, 870, 894, 902, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917,, 919, 920, 921, 923, 925, 926, 928, 929, 930, 931, 932, 934, 935, P.) Zamfirescu Mihnea (896, 904, 911, 912, 916, 923, 929, 932, 946, 950, 964, 968, 1084, 85, 86, 89, 90, 91, E: 309, 323, 324); clasa XI-a. Istinie Crăciunel (1042, 84, 98, E: 351, 356, 359, 364, 370 378, 381). *Liceul 2 băieţi* clasa VIII-a. Bădună I. Alexandru (E: 370, 371, 378,

381, 382); clasa XI-a. Radu Gh. Nicolae (841, 842, 940, 952, 963, 964, 992, 1000, 2, 38, 42, 58, 65, 68, 69, 70, 78, 79, 80, 84); *Liceul 4 băieți*, clasa VIII-a. Mirea Paul (E: 380, 381), *Liceul 5 băieți*. Clasa X-a. Costache N. Alexandru (1022, 24, 26, 84, E: 356, 370, 371, 372, 373, 381, 387, 391, 392, 398), Popescu D. Bogdan (1084, 85, E: 303, 305, 3006, 356, 358, 361, 370, 371, 373, 381); clasa IX-a. Manea Marin (872, 873, 875, 876, 907, 908, 911, 913, 923, 1033, 42, 65, 68, 69, 78, 81, 84, 98, E: 356, 368, 361, 362, 370, 373). *Liceul 6 băieți*. Clasa VIII-a. Nicolau Florin (E: 331, 335, 337, 346, 349, 351, 358); clasa IX-a. Boca C. Lucian (878, 904, 905, 912, 913, 937, 938, 1078, E: 306, 309, 317, 320, 323, 324, 329, 335), Luzi Florea (841, 871, 872, 873, 876, 888, 906, 912, 930, 938, 944, 952, 972, 973, 999, 1000, 29, 42, 68, 78, 98, E: 290, 292, 293, 294, 300, 302, 304, 308, 315, 316, 318, 320, 321, 323, 324, 327, 328, 329, 333, 335, 339, 341, 342, 344, 347, 349, 353, 355, 357, 358, 360 368, 370, 371), Plătineanu Dan (971, 972, E: 292, 296, 305, 306, 309, 312, 314, 318, 319, 320, 321, 322, 324, 329, 339, 342, 344, 346, 347, 348, 349, 350) Popovici I. Radu (929, 954, 972, 977, 993, 1022, 33, 38, 69, E: 315, 316, 317, 325, 328, 334, 340, 343, 345, 347, 348, 359, 360, 363, 364, 365, 368, 371, 376, 379, 383, P), Todescu Cornel (E: 322, 329, 339, 347, 370, 380, 382, 391); clasa X-a. Kestenband Barbu (839, 853, 882, 934, 946 994, 996, 998, 1002, 42, 62, 68, 69, 70, 72, 79, 80, 81, 82, 84, 88, 96, P) *Liceul 7 băieți « I. L. Caragiale »*. Maftei C. Alexandru (1005, E: 382, 384, 394, 396); clasa X-a. Stoleru Gheorghe 813, 835, 901, 904, 923, 985, 986, 989, 1018, 69, 78, 81, 84, 85, 97, 106, P). *Liceul 9 băieți* Clasa XI-a. Chioveanu Emil (836, 839, 841, 842, 848, 850, 852, 953, 854, 856, 860, 863, 864, 865, 866, 867, 871, 872, 873, 875, 876), Răzuș Alexandru (838, 839, 841, 842, 845, 848, 850, 852, 853, 857, 860, 861, 866, 868, 870, 878, 881, 882, 907, 937, 938, 940, 942). *Liceul 10 băieți « Aurel Vlaicu »*. Clasa VIII-a. Petre T. Tudor (E: 318, 342, 349, 357, 358, 371); clasa IX-a. Calciu Traian (1033, 84, E: 328, 331, 335, 336, 339, 370, 381), Dumitrescu Badea (1084, E: 339, 349, 370, 371), Bădescu Marcel (1084, E: 306, 309, 315, 317, 318, 321, 322, 325, 328, 331, 335, 336, 337, 339, 354, 356, 358, 362, 363, Bonghez Valeriu E: 305, 309, 335, 353, 358 361), Ilie Vicențiu (904, 1037, E: 305, 306, 335), Miclăuș Ion (873, 876, 971, 976, E: 300), Marin Pavel (888, 952, 971, 974, 992, 1000, 12, 14, 33, E: 304, 305, 306, 308, 309, 312, 313, 314, 321, 323, 324, 329, 335, 336, 339, 342, 344, 346, 351, 359, 360, 373, 378), Dinescu D. Radu (1084, E: 315, 317, 318, 320, 321, 322, 326, 328, 331, 336, 338, 339, 343, 344, 345, 354, 356, 358, 361, 362, 363, 364, 365, 370, 371, 382), Sandu Gh. Ion (863, 864, 865, 871, 872, 873, 904, 905, 913, 929, 992, 1000, 25, 37, 69, 84, 85, E: 318, 329, 335, 338, 357, 358, 361, 362, 363, 364); clasa X-a. Câmpu Eugen (944, 946, 948, 950, 963, 964, 965, 966, 968, 1040, 57, 62, 64, 67, 68, 69, 72, 76. 78, 79, 81, P), Cojocaru V. (E: 268, 305, 306, 324, 335), Chiriță Adrian (1033, 38, 39, 40, 43, 57, 58, 62, 68, 69 78, 79, 80, 81, 84, 87, 88, 97 98, E: 342, 343, 358, 360, 361, 362, 370, 373, 378, 381, 382), Alvirescu Gavril (1061, 62, 78, 80, 84, 98, 127), Andreescu Gh. Radu (1084, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 93, 94, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 104, 106, 107, 108, 110, 112, 113, 114, P); clasa XI-a. Alexe Gheorghe (1078, 84, E: 381, 382, 384), Andrei Al. (921, 927, 938, 940, 942), Alexe Mircea Cornel (951, 968, 1012, 40, 42, 68, 69, 70, 82, E: 339, 349, 355), Câmpeanu C. Alexandru (972, 973, 1000, 1, 2, 84. E: 323, 324, 325, 331, 358), Nica N. Barbu (873, 881, 904, 905, 906, 908, 910, 912, 937, 938, 940, E: 300), Vlădescu Gheorghe (841, 845, 853, 863, 864, 867, 1007, 58, 62, 63, 78, 79, 81, 84, 87, 88, 98, P), Popovici Ștefan (841, 845, 848, 850, 853, 889), Zidăroiu Gh. Corneliu (819, 841, 845, 850, 863, 864, 867, 868, 872, 873, 874, 875, 876, 889, 905, 907, 910, 912, 913, 916, 923, 930, 942, 970, 972, 973, 974, 978, 984, 993, 1000, 40, 58, 62, 63, 69, 78, 79, 84, 88, 98, P). *Școala medie tehnică de măsurători terestre*. Anul III. Bălu Vasile (937, 942, 1038, 42, 84, 87, 88, 94, 98, E: 293, 356, 365, 368, 369, 370, 371, 373, 376, 377, 378, 380, 381, 382, 383), Moga Emil (880, 915, 971, 973, 975, 976, 988, 989, 1004, 5, 25, 84, 127, E: 318, 353, 369, 370, 372, 373, 374, 376, 379. 381, 382, 383, 386, 387, 388, 389, 391, 396, 397); anul IV. Tănase Dumitru (853, 873, 889, 911, 962, 1012, 19, 44, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 1101, 113, E: 356, 369, 370, 372, 373, 374, 376, 377, 378, 380, 381, 382, 383). *Școala medie tehnică mecanică nr.* 1 Ioniță Ion (E: 370, 371, 373, 378, 379, 383), Tănase Ilie (341, 349, 350, 370, 371). *Școala medie tehnică mecanică nr. 2.* anul I. Dan Maria (1093, 98, 102, E: 286, 288, 309, 335, 346, 358, 370, 371, 374), Ilinca P. Gheorghe (E: 306, 324, 335, 346, 358, 370, 371), Pescaru Nicolae (E: 282, 283, 288, 292, 358), Vlad Rada (1102, E: 306, 370, 371, 374), Scarpet Grigore (E:C 306, 309, 310, 316, 368, 370), Velicaglu Dumitru (E: 298, 305, 306, 324, 346); anul II. Radu Sebastian (1093, 102, E: 353, 357, 358, 367, 370, 373, 377, 381); anul III. Neguț Gh. Nicolae (878, 881, 882, 888, 898, 900, 904, 905, 906, 908, 909, 913, 916, 917, 923, 927, 929, 934, 940, 942, 944, 950, 968, 971, 972, 973, 974, 986, 988, 992, 1004, 75, 84, 87, 88, P, E: 301, 303, 306, 308, 310, 315, 317, 320, 320, 322, 327, 331, 334, 335, 341, 349, 369, 371, 381, 382). Școala de 7 ani nr. 4 băieți, clasa VII-a. Lițoiu D. Savu (E: 305, 306, 308, 309, 318, 324, 355, 362, 362, 370, 382); Școala nr. 50, băieți, clasa VII-a. Pătrașcioiu Adrian (E: 369, 370, 374, 376, 381, P).

BUZĂU. Școala medie tehnică — anul III. Tudor T. Gheorghe (1070, 93, E: 371, 379, 382); clasa IX-a. Ioniță Aurelia (E: 344, 349, 370, 371, 372, 373, 378), Carpat Letiția (837, 839, 839, 878, 879, 1007, E: 369, 370), Munteanu V. Gheorghe (1064, 68, 69, 78, 79, 81); clasa XI-a. Bâcă D. Nicolae (1062, 65, 68, 69, 70, 81, 82), Duțu Alexandru (937, 938, 940, 950, 1069, 80, 84, 87, 88, 98).

CĂLĂRAȘI. *Școala medie tehnică de mecanizarea agriculturii*. Anul III. Banu Alexandru (986, 1019, 33, 38, 68, 73, 79, 80, 88, 93, 107, 121, 139, E: 337, 357, 360, 365, 370, 371, 372, 372, 382, 386, 387, 391, 397, 398), Petrovici Gheorghe (1065, 69, 84, E: 363, 364, 382). Liceul de băieți — clasa VIII.a. Nicolescu Dan (973, 999, E: 337, 356, 370, 371, 373, 378, 382, 389, 398), Nițulescu V. Alexandru (E: 302, 304, 305, 306, 309, 358, 370, 398), Simionescu I. Dumitru (E: 305, 306, 309, 358, 359, 370); clasa X-a. Mazilu N. Constantin (992, 1000, 38, 62, 79, 80, 84, 87, 127, 137, 138); clasa XI-a. Vasilescu Constantin (822, 861, 881, 917, 930, 959, 964, 968, 984, 988, 991, 992, 993, 994, 998, 999, 1000, 4, 7, 19, 25, 33, 38, 40, 42, 43, 44 62, 65, 68, 69, 70, 79, 80, 81, 84, 85, 87, 88, 95, 96, 98, 102, 115).

CÂMPINA. *Școala medie tehnică de petrol Nr. 2.* Anul II. Matei Ioan (888, 904, 905, 950, 964, 972, 974, 1038, 55, 65, 68, 78, 80, 81, E: 308, 321, 324, 341, 243); *Școala medie tehnică de petrol, nr. 1*, anul III. Rovitu Nicolae (974, 1007, 68, 84, E: 317, 338, 347, 348, 356, 358, 361, 365, 380, 382).

CAREI. Liceul mixt, clasa X-a. Sichet Ovidiu (E: 337, 338, 344, 346, 354, 355).

CÂMPULUNG-MUSCEL. Clasa IX-a. Enescu V. Vlad (1084, 87, E: 303, 305, 306); clasa X-a. Copăescu Nicolae 1063, 65, 68, 69, E: 305), Sminchişescu T. Gheorghe (1084, E: 369, 370, 371, 373, 382), absolvent Zăvoianu Ioan (991, 998, 1042, 1084, E: 305).

CARANSEBEŞ. Şcoala Pedagogică, anul IV. Cimponerescu Valeriu (E: 351, 354, 355, 358, 362, 370, 378, 381, 382, 1000, 65, 69, 78, 81, 84, 98), Liceul mixt. Ciric Ioan (904, 905, 906, 907, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 919, 923, 926, 927, 928, 929, 930, 938, 939, 940, 1033, 38, 40, 42, 54, 58, 62, 69, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 88, 89, 96, 98, 106, 113).

CÂMPULUNG MOLDOVENESC. Liceul mixt., clasa VIII-a. Apetrei Nicolae (E: 370, 371, 372, 379, 380, 381, 382), Pilug Ioan (E: 369, 370, 371, 372, 379); clasa IX-a. Coca Dionisie (906, 1084, E: 303, 305, 306, 370, 372, 380), Doroftei Horia (906, 1084, 98, E: 370, 371, 372, 380).

CARACAL. Clasa IX-a. Georgescu Ionel (841, 876, 878, 888, 904, 1025, 40); clasa X-a. Ciucă Gh. Ion (839, 841, 845, 853, 865, 876, 878, 888, 895, 904, 917, 946, 952, 959, 1018, 25, 33, 35, 40, 43, 62, 68, 69, 98, P); clasa XI-a. Tişcovschi Valeriu (1033, 38, 30, 43, 45, 58, 69, 78, 79, 81, 82, 84, 97, 98, 104).

CLUJ. *Facultatea muncitorească*, anul I. Apolzan Ion (E: 335, 369, 370, 373, 382), Căpraru Maria (E: 335, 369, 370, 373, 382), Comşa Aurel (E: 335, 369, 370, 373, 382), Chelemen Mihai (E: 353, 358, 369, 370, 371), Dan Alexandru (E: 335, 369, 370, 373, 381), Faghiura Gheorghe (E: 335, 369, 370, 373, 381), Negrea Aron (E: 335, 369, 370, 373, 381), Negoiţă Nicolae (E: 335, 369, 370, 374, 382, 384), Pistol Nicolae (E: 335, 369, 370, 373, 381), Pleşa Aurel (E: 335, 369, 370, 373, 381), Pop Nicolae (E: 335, 369, 370, 373, 381, 382), Pop Viorel (E: 335, 370, 373, 387, 382), Rusu Alexandru (E: 369, 370, 371, 373, 381), Sîngerean Gheorghe (E: 358, 369, 370, 373, 374). Suciu Emil (E: 335, 369, 370, 373, 382), Tucu Petre (E: 358, 369, 370, 371, 373, 381), Marţian Gavril (E: 335, 369, 370, 373, 381), Păun Constantin (E: 335, 369, 370, 373, 381); anul II. Cutuş Mihai (E: 336, 378, 1065, 68, 84, 98) Miclăuş Tiberiu (1065, 68, 98, E: 336, 373), Sfârlea Vasile (1065, 68, 84, 98, E: 336, 378), Szappanyos Mihai (1065, 68, 84, 98, E: 336, 378, 380), Szentannay Arpad (1065, 68, 90, 98, E: 336, 378), Soită Viorel (1090, 98, E: 336, 358, 378); *Liceul de fete*, clasa VI-a. Solomon Ileana (E: 369, 370, 371, 373, 379, 382), Mănăştureanu Florica (E: 369, 370, 371, 373, 379, 382); Spîrchez Monica (908, 909, 910, 915, 940, 1025); *Liceul de băieţi*, clasa VIII-a. Bratu V. Ioan (871, 872, 873, 937, 938, 1042, E: 285, 304, 305, 306); clasa X-a. Bucurescu Mircea (878, 882, 893, 900, 905, 906, 907, 908, 911, 915, 916, 923, 930, 931, 938, 944, 946, 950, 959. 962, 963, 965, 968, 972, 971, 976, 992, 1000), Constantinescu Florin (1084, 90, 98, 99, E: 336, 349, 350, 378), Haiduc Ionel (875, 946, 950, 952, 978, 992, 1040, 84, 87, 98, 102).

CONSTANŢA. Clasa VII-a. Ciortan Romi (E: 353, 354, 357, 358, 361), Coja Marilena (E: 322, 354, 355, 358, 361), Comănescu A. Ana (E: 353, 354, 355, 358, 365), Marta Raluca (E: 351, 353, 354, 355, 358), Petculescu Petre (E: 321, 324, 342, 344, 379, 380), Vasilescu Gloria (E: 353, 354, 355, 358, 361), Iordache Gh. Elena (E: 355, 357, 358, 361, 367), Diacu Olimpia (E: 353, 354, 355, 368, 361); *Şcoala hidrotehnică*, anul I. Caraman Cherata (855, 871, 873, 912, 971, 975, 1084, E: 292, 301, 305, 306, 309, 314, 316, 318, 335, 346, 349, 351, 353, 358); anul II. Ştefan Ioan (872, 874, 875, 972, 974, 1078, E: 290, 291, 292, 338, 349, 350, 356), Martinescu Ion (974, 99, E: 334, 361, 370, 371, 382); anul III. Lambă Stelian (872, 873, 904, 905, 907, 915, 923, 927, 930, 938, 940, 943, 1029, 38, 68, 69, 78, 79, 84, 87, 98), Ică I. Aurel (867, 871, 872, 873, 874, 875, 905, 910, 915, 923, 928, 938, 942, 972, 973, 974, 999, 1032, 42, 84, E: 293, 294, 305, 306, 309, 329, 337, 338, 358, 362, 365), Curtede Pichiret) 823, 908, 923, 1025, 38, 43, 68, 78, E: 306, 305, 358), Tiriteanu Emilia (871, 872, 873, 875, 917, 938, 942, 1084, 87, E: 303, 305, 329, 335, 338, 369, 370, 371, 375, 378, 382); *Liceul de băieţi*, clasa IX-a. Cristea Ion (808, 810, 816, 820, 824, 838, 841, 842, 854, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 8689, 870, 871, 872, 873, 875, 876, 879, 888, 889, 890, 891, 893, 894, 895, 897, 900, 902, 906, 907, 908, 910, 911, 913, 915, 918, 920, 921, 923, 929, 930, 932, 934, 935, 938, 940, 946, 1084, P); clasa X-a. Constantin Victor (1054, 64, 65, 67, 68, 69), Vasile Dimanca (1025, 68, 69, 78, 84, 98, E: 329, 335, 358, 362, 364, 365), Ionescu D. Nicolae (1033, 40, 68, 69, 78, 84, 98, E: 358, 362, 370), Mitescu Constantin (871, 873, 878, 882, 895, 915, 916, 919); Clasa XI-a. Cocoş Emanuel (864, 870, 871, 872, 874, 875, 876, 878, 879, 880, 881, 882, 887, 888, 889, 890, 891, 893, 894, 895, 896, 897, 900, 902, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 923, 925, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 946, 948, 950, 942, 954, 955, 956, 957, 959, 963, 964, 966, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976), Bumbac Paul (837, 838, 842, 844, 845, 850, 863, 864, 865, 867, 868, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 911, 912, 913, 915, 923), Baldovin I. Traian (1084, 88, E: 369, 370, 371, 372, 373, 378), Kümbertlian G. (1073, 76, 84, 87, 88, 88, 98, 102, 106, E: 366, 370, 371, 372, 373, 377, 378, 379, 380, 381, 382, P), Sachelarie Nicolae (1065, 68, 76, 78, 79, 80, 81, 84, 87, 88, 89, E: 352, 353, 354, 355, 356, 358, 361, 369, 370, 371, 374, h38, 381, 382), Bădică S. Marin (904, 905, 906, 907, 908, 910, 913, 915, 916, 923). Ceacâru V. (854, 864, 874, 905, 907, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 923, 925, E: 292, 294, 301).

CORABIA. *Liceul mixt* clasa X-a. Bădănac M. Alexandru (908, 945, 946, 950, 953, 954, 955, 959, 963, 969, 971, 972, 973, 974, 975, 987, 979, 980, 984, 987, 988, 992, 993, 995, 996, 998, 999, 1000, 2, 5), Boarţă Victor (904, 908, 913, 915, 916, 923, 927, 931, 937, 938, 940, 941, 950, 971, 972, 973, 974, 986, 999, 1000, 1, 25, 42, 65, 68, 78, 79, 84, E: 365).

CRAIOVA. *Liceul 1 fete*. clasa V-a. Cetăţeanu Rodica (E: 318, 346, 354, 370, 382, 392, 398); clasa X-a. Popescu Cireşica (863, 865, 870, 871, 872, 873, 904, 905, 906, 910, 911, 914, 915, 916, 972, 992, 993, 1000, 11, 80, 82, 98), Schiopu Eugenia (823, 837, 842, 863, 871, 972, 973, 882, 904, 905, 907, 910, 913, 916, 919, 932, 938, 939k 940, 972, 973, 974, 999); *Liceul 2 fete*, clasa X-a. Mitran Paraschiva (946, 950, 1078, 98, E: 324, 358, 370, 389); *Şcoala medie electrotehnică*, anul II. Dinu Gheorghe (888, 890, 900, 907 908, 910, 923, 931, 934, 950, 952, 992, 993, 1022, 25, 29, 33, 55, 62, 65, 68, 69, 78, 81, 84, 87, 98, P), Voicu I. Traian (888, 900, 904, 906, 908, 923, 938, 950, 1038, 68, 78, 79, 84, E: 305, 306, 308, 309, 316, 321, 324, 335, 338, 344, 342, 358, 360, 361, 364, 370, 373, 380, 381, P); *Colegul popular «N. Bălcescu»*, clasa IX-a. Mihalache Gheorghe (888, 962,

1010, 68, E: 308, 353, 358, 362, 368, 370, 371, 380), Trifan Vasile (863, 872, 875, 876, 878, 905, 910, 911, 914, 915, 916, 927, 980, 999, 1002, 28, 33, 62, 68, 98, 99, E: 323, 351, 355, 362, 370, 371); Antoniu Ştefan, clasa X-a. (822, 838, 841, 871, 872, 873, 875, 952, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 1028, 38, 42, 62, 65, 68, 69, 70, 78, 79, 84, E: 340, 342, 343, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 357, 361, 365, 368, 369, 370, 382); clasa XI-a. Iliescu C. Florian (882, 929, 1042, 76, 82, 84, 86, 87, 88, 106, E: 364, 365, 378); *Liceul 2 băieţi* clasa VIII-a. Bărbulescu I. Nicolae (E: 369, 370, 371, 380, 382, 384, 387, 392, 397); clasa X-a. Mitrea M. Nicolae (993, 994, 1000, 38, 40, E: 335, 336, 353), Sandu Titu (822, 834, 842, 845, 863, 861, 872, 973, 874, 876, E: 287, 318, 355, 362, 371, 373); clasa XI-a. Florescu Gh. Mircea. (1062, 64, 65, 69, 127, E: 341, 346, 358, 360, 361, 362, 364, 365, 387, 390), Sufan T. Venus (904, 905, 906, 908, 917, 923, 1033, 62, 70, 84, 94, 98, 100, 113, E: 321, 339, 323, 343, 372, 374); *Şcoala de 7 ani din Bălceşti,* clasa VII-a. Zidăroiu Victoria (E: 321, 324, 355, 361, 362, 370, 378).

DEJ. Clasa VIII-a. Streang Valeria (999, 1001, E: 329, 332, 346); clasa IX-a. Borzasi Delia (950, 965, 968, 1084, E: 361, 371); clasa XI-a. Chiricuţă Gheorghe (878, 881, 904, 905, 908, 909, 910, 911, 913, 915, 916, 923, 927, 934, 938, 940 946, 950, 952, 954, 959, 962, 971, 972, 973, 974, 988, 992, 993, 1000).

DEVA. *Şcoala pedagogică mixtă.* Draica Constantin (1089, 97, 98, 99, E: 370), Mîrza Elena (1029, 69, 98, 99, 106, E: 358, 362, 365, 378); *Şcoala de 7 ani,* clasa VII-a. Gîrbou Emil (E: 370, 373, 377, 380, 381).

FĂGĂRAŞ. Clasa XI-a. Dragomir Ioan (881, 904, 912, 913, 915, 916, 923, 938, 1065, 84), Ghindea Lucian (904, 915, 916, 1076, 84, E: 353, 354, 364, 365, 370).

FOCŞANI. Clasa VI-a. Mărgărit Doru (E: 354, 357, 361, 370, 373, 379, 382); clasa VIII-a. Vlase I. Constantin (912, 937, 971, 972, 973, 999, E: 305, 306, 309, 314, 320, 324, 329, 332, 335, 344, 346, 349, 351, 355, 357, 358, 363, 366, 367, 369, 370, 371, 382, P); Pascu Corneliu (959, 1007, 33, 38, 65, 84, E: 309, 338, 347, 349, 350, 358); clasa X-a. Bujoreanu C. Ion (945, 950, 1033, 69, 78, 79, 84, E: 309, 353, 354, 365, 394, 397, 398, 400), Baieră B. Bogdan (839, 861, 874, 876, 878, 879, 880, 882, 890, 906, 915, 919, 929, 928, 931, 938, 940, 944, 945, 946, 950, 951, 952, 953, 954, 957, 958, 959, 960, 963, 965, 966, 968, 969, 971, 973, 978, 980, 988, 993, 992, 994, 1000, 1, 7, 12, 40, 42, 65, 68, 69, 70, 79, 80, 81, 84, 87, 88, 93, E: 304, 311, 312, 315, 316, 317, 319, 320, 321, 322, 323, 326, 328, 329, 336, 338, 339, 341, 342, 346, 347, 348, 349, 350, 353, 358, 361, 362, 363, 364, 365, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 378, 382, 387, 388, 389, 390, 391, 396, 397, 398, P) Buruiană Gheorghe (947, 951, 952, 954, 959, 963, 972, 973, 974, 975, 1007, 14, 33, 38, 40, 32, E: 305, 306, 309, 329, 336, 335, 347, 349, 350, 353, 356, 358, 370, 369, 371, 372), Damian Alexandru (873, 904, 907, 937, 950, 974, 1040, 68, 84, 98), Donescu St. Drago- 978, 979. 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 996, 997, 998, 999, 1000, 1, 2, 4, 16, P), Hulea Ionel (950, 954, 1079, 84, E: 309, 314, 318, 335, 353, 354, 356, 400), Ianuc Corneliu (876, 878, 904, 906, 910, 910, 913, 915, 916, 919, 926, 930, 931, 938, 946, 951, 952, 957, 958, 974, 976, 985, 1081). Moraru T. Gheorghe (945, 950, 1033, 68, 78, 79, 80, 81, 84, E: 309, 335, 353, 354, 356, 357, 358, 362, 363, 364, 365, 400), Manolache N. Dumitru (873, E: 293, 338, 342, 347, 361, 362, 364, 365, P), Munteanu N. Vasile (950, 1033, 69, 78, 79, 80, 84, E: 335, 353, 354, 356, 358, 362, 363, 365, 397, 400), Petrovici Radu (978, 1065, 68, 70, 79, 81, P), Rosenfeld Paul (904, 923, 940, 1069, 78, 79, 81, 84, 98, E: 305, 306, 338, 383), Robănescu N. Adrian (838, 939, 841, 863, 904, 913, 937, 940, 942, 968, 971, 975, 977, 1005, 6, 7, 14, 25, 65, 93, 106, 121, E: 338, 342, 358, 361, 362, 363, 364, 365, 370, P) Toader M. Alexandru (1068, 78, 79, 80, 84, E: 309, 318, 335, 349, 354, 357, 358, 362, 364, 365, 368), Stafler Mihai (1033, 40, 65, 69, 84, 93, 98, E: 306, 358, 362, 364, 369, 370, 378), Stăncic Octavian (838, 839, 871, 972, 873, 904, 938, 951, 972, 1084, E: 298, 301, 303, 305, 311, 318, 327, 338, 353), Spătaru Gh. Tiberiu (945, 950, 951, 959, 1005, 7, 65, 68, 69, 81, 84, 87, E: 349, 350, 353, 356, 358, 363, 364, 365, 378, 400).

GALAŢI. Clasa X-a. Balaban Emil (878, 881, 882, 888, 889, 891, 982, 894, 895, 900, 901, 902, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 921, 923, 927, 928, 937, 938, 940, 942); *Şcoala medie tehnică de mecanică,* anul III. Gugonatu Traian (1105, 107, 109, E: 369, 370, 381, 382).

GHEORGHENI. *Liceul mixt romîn,* clasa X-a. Cilinghir Vladimir (1007, 65, 66, 68, 69, 79, 81, 87, 88, 98, E: 315, 316, 317, 327, 340, 349, 350, 351, 356, 358, 366, 368, 367, 370, 371, 372, 373, 374, 378, 380, 381, 382, 383).

GIURGIU. *Şcoala de 7 ani nr. 6.* Clasa VI-a. Martu D. Florea (E: 306, 309, 312, 370, 382). *Şcoala de 7 ani — Daiţa,* clasa VI-a. Mihai I. Virginia (E: 276, 279, 291, 315, 317, 320, 322, 228, 335), *Liceul de băieţi* clasa VII-a Cărjaliu N. Marin (E: 306, 308, 310, 312, 317, 318, 319, 320, 322, 324, 326, 328, 329, 330, 331, 335, 337, 338, 340, 341, 344, 346, 349, 351, 382; P; 887, 888, 904, 912, 913, 914, 915, 937, 938, 940); *clasa* VIII-a. Iancu M. Marcel (986, 999, 1002, 5, 42, 65, 84, E: 352, 357, 358), Anghel I. Ion (915, 919, E: 290, 292, 293, 306, 309), Ghena St. Gheorghe (919, E: 306, 309, 331, 365, 370, 372, 373), Ghena V. Ion 904, 906, 912, 1000, 1, 22, 38, 84, E: 325, 373), Ploeşteanu Nicolae (986, 988, 999, 1001, 22, 25, 68, E: 306, 337, 358, 365), Oprea C. Petre (999, 1001, 22, 68, 78, 84, E: 354, 355, 358), Sin Gh. Alexandru (881, 904, 989, 1022, 42, 78, E: 309, 354, 370, 382), Stoenică St. Marin (291, 304, 405, 306, 318, 320, 328, 329, 335, 337, 338, 341, 344, 349, 358, 364, 377, 381), Voiculescu P. Valeriu (986, 999, 1000, 42, 78, E: 354, 357), Croitoru C. Petre (1064, 65, 76, 84, E: 331, 337, 338, 346, 352, 354, 357, 358, 365), Roşu I. Dumitru (1042, 68, 73, 78, 84, E: 306, 309, 311, 313, 316, 335, 338, 349, 351, 353, 370, 373), Pieleanu I. Dumitru (838, 871, 872, 873, 878, 881, 888, 904, 906, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 923, 937, 938, 940, 950, 951, 959, 966, 969, 973, 974, 978, 979, 980, 985, 986, 988, 989, 992, 993, 994, 996, 998, 999, 1000, 1, 2, 5, 7, 9, 68, 84, E: 290, 299, 306, 309, 310, 312, 317, 322, 324, 329, 330, 331, 338, 340, 341, 344, 349, 351, 352, 353, 354, 365, 372, 373); clasa IX-a. Anghel M. Florea (992, 1002, 4, 42, 68, E: 353), Borici H. Lucian (1040, 84, E: 353, 354, 357, 358, 362, 365, 370, 373, 382), Mişcol Mircea (830, 838, 839, 847, 848, 873, 875, 880, 881, 882, 900, 910, 931, 946, 948, 951, 962, 964, 968, 972, 973, 974, 996, 999, 1000, 5, 9, 18, 19, 20, 22, 25, 29, 37, 38, 42, 45, 46, 47, 55, 69, 70, 79, 89, E: 325, 326, 327, 329, 335, 338, 341, 344, 345, 347, 348, 349, 350, 358, 361, 364, 365, 366, 367, 371, 372, 377, 382), Mihai M. Vasile 819, 839, 842, 850, 944, 945, 946, 949, 986, 993, 999, 1001, 9, 11, 22, 30, 38, 40, 65, 68, 70, 73, 76, 78, E: 276, 277, 291, 295, 315, 322, 328, 328, 331, 335, 337, 354, 357, 358, 365, P), Mateescu Doina Lucia (871, 872, 873, 939, 930, 938, 976, E: 358, 370, 373, 381), Pătraşcu C. Dumitru (986, 999, 1001, 9, 11, 23, 25, 25, 29, 38, 40, 62, 69, 73, 78, 84), Roşu M. Petrică (850, 863, 873, 876, 904, 906, 923, 948, 950, 958, 966, 972, 973, 986, 999, 1005, 30, 62, 78, 84, E: 306, 309, 337, 349, 358,

365, 370, 372, 381, 382, 383), Geantă L. Ilie (986, 992, 999, 1055, 65, 78, 84, E: 337. 338, 340, 341, 344, 346, 349, 351, 358, 365); clasa X-a. Aldea V. (839, 863, 872, 871, 873, 875, 876, 881, 882, 898, 901, 904, 912, 913, 938, 941, 971, 980, 984, 985, 986, 1000, 7, 14, 18, 20, 25, 39, 85, 86, 87, 88, 94, 102, 106, 114, E: 295, 305, 312, 313, 315, 317, 319, 320, 322, 323, 324, 329, 331, 335, 337, 346, 347, 364, 365, 382), Baciu V. Petre (835, 838, 872, 904, 938, 999, E: 277, 291, 295, 298 301, 305), Bătineţu M. Dumitru (838, 359, 863, 868, 876, 878, 879, 881, 882, 884, 885, 896, 900, 904, 907, 912, 916, 917, 921, 930, 937, 938, 940, 941, 934, 944, 946, 948, 949, 950, 951, 952, 954, 957, 958, 960, 963, 964, 965, 966, 968, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 984, 986, 987, 999, 1000, 5, 7, 9, 13, 18, 22, 24, 25, E: 293, 302, 311, 312, 313, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 322, 323, 324, 326, 328, 329, 331, 335), Crivăţ M. Virgil (1011, 22, 25, 29, 78, E: 305), Guţă R. Gheorghe (871, 872, 873, 875, 904, 910, 932, 966, E: 30*, 306, 309, 312, 313), Măgureanu C. Iulian (882, 1102, 106, 109, E: 290, 295, 309, 312, 328, 330, 331), Rădoi Fl. Ioan (1011, 22, 25, 29, 38, 78), Stanciu Em. Mirel (850, 852, 874, 876, 877, 923, 948, 966, 987, 1003, 7, 9, 11, 22, 25, 68, 73, 78, 79, 80, 81, 84, 87, 88, 98, 102, 106, 110, 114, E: 326, 328, 329, 330, 331, 332, 335, 337, 346, 347, 349, 352, 353, 354, 356, 357, 358, 363, 364, 365, 368, 370, 371, 375, 379, 380, 381, 382, 383, P) Vidan Marius (835, 844, 850, 875, 979, 980, 982, 986, 987, 988, 992, 993, 994' 999, 1000, 7, 11, 78, 79, 84, 85, 86, 87, 98, 102, 106, 114, E: 290, 291, 292, 295, 298, 305, 306, 309, 310, 312, 317, 318, 320, 322, 323, 328, 329, 332, 337, 338, 344, 347, 348, 349, 350, 362, 365, 371), Vasile T. Alexandru (944, 945, 971, 972, 973, 1001, 18, 68, 78, E: 305, 306, P), Vlăsceanu Maria (1089 106, E: 305, 306, 309); clasa XI-a. Fotă M. Stan (887, 893, 897, 905, 909, 914, 916, 917, 918, 919, 927, 957, 962, 971, 972, 984, 986, 998, 999, 1000, 11, 16, 24, 29, 33, 55, 60, 62, 62, 67, 76, 83, 84, 88, 89, 98, 99, 104, 106, 110, 113, 114), Guţe St. Gheorghe (1062, 84, 87, E: 358, 365, 370, 373, 382), Mitu St. Velicu (871, 872, 873, 875, 878, 882,, 888, 889, 890, 904, 905, 916, 918, 927, 959, 978, 979, 980, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 993, 994, 996, 998, 999, 1000, 1, 2, 4, 5, 7, 9, 12, 15, 22, 23, 24, 25, 29, 30, 32, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 78, 79, 80, P), Moraru L. Marcel (881, 885, 988, 1009, 30, 42, 63, 68, 76), Ologu St. Paul (1063, 68, E: 358, 365, 370), Petcu I. Dumitru (918, 931, 938, 952, 958, 978, 979, 980, 985, 996, 1008, 5, 22, 29, 36, 58, 74, 75, 77, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 93, 96, 102, 103, 105, 106, 107' 109, 110, 113, 115), Vişan V. Marin (878, 915, 937, 940, 950, 951, 959, 978, 979, 986, 988, 992, 994, 998, 999, 1000, 1, 2, 7, 9, 11, 22, 25, 29, 30, 38, 40, 42, 55, 62, 65, 68, 69, 73, 74, 75, 76, 78, 84), Piciu M. Jean (1063, 65, 69, 76, 78, 79, 84), Tudor Silviu (979, 1000, 2, 22, 23, 25, 29, 30, 40, 42, 55, 68, 75, 76, E: 330, 352, 354), Student. Dănilă C. Gheorghe (1018, 19, 20, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 32, 33 38, 39, 40, 41, 43, 46, 55, P); *Şcoala medie tehnică de mecanizarea agriculturii*, anul II. Pante M. Gheorghe (904, 905, 908, 917, 925, 930, 988, 1028).

HUNEDOARA. Absolvent Gheorghe Valter (1008, 99, E: 356, 369, 370, 371, 373, 374, 382).

IAŞI. clasa IX-a. Alexa Dumitru (878, 1058, E: 314, 316, 324, 358, 378); clasa X-a. Arsintescu I. Virgil (881, 842, 880, 906, 907, 911, 913, 915, 916, 918, 919, 923, 927, 938, E: 301, 302, 304, 305, 305, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313), Bîrsan Temistocle (908, 959, 993, 1040, 68, 78, 79, 82, 84, 98), Gugui Cornel (1062, 68, 84, 98, 106, E: 362, 364, 365, 370), Herşcovici Iosif (813, 820, 827, 828, 829, 845, 876, 888, 902, 1017, 29, 34, 40, 42, 61, 70, 88, 90, 97, 98, 99, 100, P); clasa XI-a. Ursache Eugeniu (887, 906, 923, 938, 1038, 40 ,84, 87, 88, 97, 98). *Şcoala pedagogică*, anul III. Grăjdeanu I. Petre (875, E: 328, 346, 347, 351, 353, 354, 358). Anul I. Cobzac Atanase (E: 298, 306, 335, 337, 346, 347, 351, 365); Crăcană Petru (873, E: 306, 322, 352, 368, Burlacu Petru E: 306, 335, 347, 351, 358, 365), Mititelu Petru (E: 306, 335, 358, 365, 372); clasa IX-a, Cărăuşu C. (904, 905, 912, 915, 916, 917, 937, 938, 940), Rapot Paul (1078, 84, E: 305, 306, 309, 324, 347, 373); clasa X-a. Geambaşu Lică (838, 839, 841, 842, 845, 846, 848, 850, 852, 853, 854, 856, 861, 863, 864, 866, 867, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876), Ungureanu Ştefan (837, 838, 839, 841, 842, 848, 850, 876, 882, 904, 913, 959), Vaisman Izu (837, 838, 839, 841, 842, 844, 845, 846, 848, 850, 851, 852, 853, 854, 856, 859, 861, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 876).

LUGOJ. clasa IX-a. Lăzărescu Mircea (1033, 35, 38, 43, 53, 68, 69, 78, 80, 81, 84, 89, 93, 95, 97, 98, 99, 100).

MORENI. (Cîmpina-Ploeşti). *Şcoala medie tehnică de petrol*, anul I B. Tăbăroiu Ana (1033, 43, 54, 69, 73, E: 341, 345, 349, 352, 362); anul III, Enăchescu T. Stoian (1037, 40, 42, 65, 68, 70, E: 343, 344, 358, 361, 368).

OCNA MUREŞULUI. *Liceul mixt*, clasa X-a. Horvat Ion (834, 859, 959, 960, 1022, 29, 55, P).

OITUZ — BACĂU. Clasa IX-a. Ghinea Constanţa (1084, E: 323, 339, 346, 347, 370, 371, 379); clasa XI-a. Butucelea Alexandru (875, 952, 986, 988, 999, 1000, 62, 65, 76, 80, 90, E: 319, 342).

ORADEA. *Şcoala medie tehnică de construcţii*, anul III. Gabrian Cornelia (1062, 78, 79, 81, 84); clasa VII-a din Inrad (Salonta). Iuhas Ioan (914, 929, 971, 972, 974, 1065, 78, 86, E: 310, 316, 317, 318, 320, 321, 322, 324, 326, 327, 328, 330, 331, 332, 336, 341, 346, 349, 350, 351, 356, 370); *Liceul de băieţi*, clasa VIII-a. Daina Iosif (914, 918, 929, 964, 971, 972, 974, 976, 1065, 68, 78, E: 329, 332, 333, 335, 340, 341, 346, 350, 351, 356, 373); clasa IX-a. Pavel Gh. Adrian (950, 971, 1022, 65, 68, 69, 78, 84, E: 318, 327, 356, 380), Pantea Ovidiu (888, 904, 906, 912, 917, 925, 937, 938, E: 305, 306, 308, 309), Şincai Radu (1068, 84, E: 358, 361, 362, 370, 371, 377, 380, 381), Rus A. Ion (846, 854, 865, 880, 881, 890, 921, 927, 929, 931, 942, 945, 950, 986, 1004, 20, 22, 24, 37, 40, 73, 84, 95, 98, E: 312, 313, 332, 336, 342, 345, 343, 350, 354, 355, 358, 362, 365, 368, 69, 370, 371, 372, 373, 374, 376, 377, 378, 382), Vicaş T. Corneliu (846, 850, 872, 875, 883, 907, 950, 1065, 68, 78, 79, 84, E: 301, 308, 322, 347, 382); clasa X-a. Bogoszy Attila (792, 854, 878, 880, 882, 904, 917, 1094), Bocu Mircea (888, 1005, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 51, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, P).

ORAŞUL STALIN. Clasa VIII-a. Minea Florin (E: 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 333, 337, 338, 339, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351), Legănuş Silvestru (871, 872, 873, 875, 876, 904, 905, 907, 908, 910, 912, 913, 915, 916, 917, 923, 927, 930, 938, 940), Podeanu Corneliu (808, 837, 839, 872, 973, 1010, E: 277, 294, 295, 298, 301, 329, 342, 356, 370, 382); clasa X-a. Chioş Sorin (871, 872, 873, 875, 904, 906, 910, 913, 915, 917, 923, 927, 938, 942, 974, 999, 1065, 68, 78), Belecu Gheorghe (988, 992, 993, 994, 997, 99, 1000, 1, 2, 25, 84, 98, E: 335, 336, 370), Zărnescu Ivan (871, 873, 913, 915, 923, 938, 950, 951, 972, 974, 980, 986, 1007, 14, 22, 25, 38, 43, 84, 98, 102, E: 305, 306, 309, 312, 313, 324, 335, 336, 370); clasa XI-a. Nan Stelian (863, 871, 873, 907, 910, 911, 912, 915, 917, 930, 942, 944, 950,

951, 954, 957, 964, 970, 975, 984, 993, 994, 996, 1001, 7, 18, 22, 33, 41, 65, 69, 84, 85, 87, 106, E: 354, 358, 362, 364, 365, 370, 371), Purecel Remus (819, 879, 881, 882, 885, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 923, 927, 937, 938, 940, 941, 942, 943, 950, 951, 952, 954, 964, 970, 972, 973, 974, 976, 984, 986, 987, 992, 993, 996, 999, 1000, 5, 7, 16, 18, 22, 23, 25, 30, 33, 37, 38, 40, 42, 65, 68, 78, 81, 84, 87, 90, 95, 102, 104, 106).

(urmează în numărul următor, rubrica rozolvitorilor din localitățile P—Z și lista respectivă a evidențiaților)

REDACTAREA SOLUȚIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebue făcută separat cu toate calculele și explicațiile necesare, iar figurile să fie desenate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluțiile mai multor probleme, pe aceeași foaie; fiecare soluție să fie precedată de numărul de ordine al problemei și enunțul complect.

— După soluționarea problemei, scrieți citeț numele, clasa și școala unde urmați sau ocupația și adresa; și trimiteți problemele așezate în ordinea lor numerică.

— *Se mai primesc soluții* numai la problemele cu numărul de ordine 1078 și următoarele, iar pentru exercițiile elementare dela E: 369 și următoarele, adică din ultimele cinci numere din R.M.F. Soluțiile ce se vor anunța la rubrica rezolvitorilor în cursul anului 1954, se vor socoti la premierea pe anul 1954.

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoțite de soluții, să fie personale și nu luate din cărți sau reviste, iar trimiterea lor să se facă odată cu problemele rezolvate. Elevii sunt sfătuiți să înceapă a propune probleme numai după ce au soluționat un număr destul de mare de exerciții și probleme. Problemele propuse, găsite necorespunzătoare, nu se vor publica.

— *Tovarășii colaboratori* sunt rugați să ne trimită dări de seamă asupra activității cercurilor de matematică și fizică la care iau parte, pentru a fi anunțate la rubrica respectivă.

— *Fiecare cetitor al R.M.F.* este rugat a face cunoscută revista și altor cunoscuți, pentru a mări astfel, numărul colaboratorilor.

— *Reclamațiile de neprimire a* R.M.F. sau cereri de numere neprimite vechi, se vor face Oficiului de Expediere a Presei, din București, strada Constantin Mille nr. 14 (telefon 5.28.90); costul unui exemplar este de un leu.

— *Problemele rezolvate*, propuse, notele matematice și fizice, articolele, dările de seamă asupra activității cercurilor de matematică și fizică pentru elevi, cererile ,sugestiile și propunerile, etc., se trimit pe adresa:

„REVISTA MATEMATICĂ ȘI FIZICA", Strada Dionisie Lupu nr. 40, raionul Stalin, București.

* * *

ERATĂ. La problema propusă 1169 în loc de $= 5$ se va scrie $= 15$.

* * *

BIBLIOTECA SOCIETĂȚII DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

1. *Bazele teoriei numerelor* de E. Rusu. (Lei 6,23).
2. *Șiruri recurente* de A. I. Marcușevici. (Traducere din limbă rusă). (Lei 1,64).
3. *Numerele lui Fibonacci* de N. N. Vorobiev. (Traducere din limba rusă). (Lei 1,83).
4. *Introducere în teoria grupurilor* de P. S. Alexandrov. (Traducere din limba rusă). (Lei 4,07).
5. *Metoda inducției matematice* de I. S. Sominschi. (Traducere din limba rusă). (Lei 1,96).
6. *Elemente de Calculul posibilităților* de Gh. Mihoc. (Sub tipar).
7. *Calcule numerice* de H. Ionescu. (Sub tipar).

ABONAMENTELE PE ANUL 1954

se fac prin oficiile poştale, prin factorii poştali, prin difuzorii voluntari şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru profesori, muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 221. — INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREŞTI

Preţul revistei: Lei 1.—

E 1426

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE ȘI FIZICE DIN R.P.R.

KAT

Institut. de Documentare Tehnică
BUCUREȘTI
OBMEH - CSERE
VYMENA - WYMIANA
TAUSCH - ÖMEHA

REVISTA MATEMATICĂ și FIZICĂ

PUBLICAȚIE LUNARĂ PENTRU TINERET

★

ANUL V

APRILIE 1954

4

EDITURA TEHNICĂ

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SUMARUL:

		Pag.
1.	*1 Mai*	89
2.	*Despre facultăţile de matematică*	90
3.	*Problema interpolării, de asistent M. Cotariu*	94
4.	*Presiuni joase şi presiuni înalte, de prof. Florica Popescu*	101
5.	*Chestiuni de examen (1239—1247)*	109
6.	*Probleme rezolvate (E. 291, E. 354, E. 355, 668, 856, 860, 861, 877, 882, 884, 885)*	109
7.	*Probleme propuse (1214—1238)*	113
8.	*Exerciţii propuse pentru şcoala de 7 ani*	115
9.	*Către cititorii Revistei Matematice şi Fizice*	116
10.	*Poşta redacţiei*	116
11.	*Rubrica rezolvitorilor de probleme*	117

4

ANUL V APRILIE 1954

ÎNCEPÎND CU NUMĂRUL URMĂTOR — MAI 1954 — REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ VA APARE CU NUMELE «GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ» SERIA B PUBLICAŢIE PENTRU TINERET

REDACŢIA; **Str. Dionisie Lupu, 40 — Tel. 2.28.87 Parter — Bucureşti**

Articolele, notele, recenziile, problemele propuse sau rezolvate, corespondenţa privitoare la activitatea matematică şi fizică a şcolilor, precum şi orice material informativ care ar interesa redacţia noastră, se vor trimite pe adresa de mai sus

REVISTA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

PUBLICAŢIE PENTRU TINERET A SOCIETĂŢII DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN R.P.R.

Anul V, Nr. 4 **Aprilie 1954**

Országos Műszaki Könyvtár TULAJDONA

1 MAI

1 Mai este ziua solidarităţii internaţionale a celor ce muncesc, este ziua în care milioane şi milioane de militanţi activi ai cauzei păcii, democraţiei şi socialismului îşi trec în revistă forţele, fac un bilanţ al victoriilor cucerite şi cu puteri sporite pornesc la noi bătălii pentru a salva omenirea dela teroarea unui nou război, pentru eliberarea popoarelor din lanţurile capitalismului.

Muncitorii din toate ţările întîmpină ziua de 1 Mai cu mîndria şi încrederea pe care o dau victoriile cucerite.

Sub conducerea Partidului Comunist al Uniunii Sovietice oamenii muncii din ţara socialismului victorios obţin minunate succese pe calea construirii comunismului dovedind întregii lumi, că numai orînduirea socialistă asigură satisfacerea maximă a nevoilor materiale şi culturale ale întregii societăţi.

Mari sînt succesele pe care, cu ajutorul masiv şi neprecupeţit al Uniunii Sovietice şi sub conducerea încercată a partidelor comuniste şi muncitoreşti, le-au dobîndit oamenii muncii din ţările de democraţie populară în construirea economiei şi culturii socialiste. Eliberaţi din cătuşele exploatării, oamenii muncii din aceste ţări construiesc socialismul, fără burghezie şi împotriva burgheziei.

In această zi, dela un capăt la altul al lumii, masele largi populare îşi exprimă în puternice manifestaţii, revendicările şi dorinţele cele mai arzătoare: să se pună capăt încordării internaţionale! Să înceteze goana înarmărilor! Masele iubitoare de pace îşi exprimă aprobarea şi sprijinul lor entuziast pentru importantele acţiuni întreprinse de Uniunea Sovietică, bastionul păcii şi securităţii în lumea întreagă în vederea realizării unei destinderi internaţionale.

Oamenii muncii din ţările capitaliste, sărbătoresc ziua de 1 Mai în condiţiile unei lupte ascuţite împotriva imperialiştilor americani, aţîţători la război, în condiţiile luptei pentru unitatea tuturor forţelor democrate, pentru apărarea independenţei naţionale şi a libertăţilor democratice. Ei văd limpede contrastul dintre lumea socialistă în continuu progres şi lumea capitalistă în descompunere şi dobîndesc astfel, forţe noi pentru marile bătălii ce-i aşteaptă. Numeroasele greve din S.U.A., Anglia, Franţa, Italia, etc, la care participă milioane de muncitori, dovedesc succesele crescînde obţinute de clasa muncitoare în lupta pentru întărirea unităţii mişcării muncitoreşti internaţionale.

Sub influenţa Marii Revoluţii Socialiste din Octombrie, urmînd exemplul luminos al marelui popor chinez, popoarele coloniale întăresc lupta împotriva imperialismului, surpîndu-i însăşi bazele existenţei sale.

Popoarele văd azi în imperialiştii americani pe duşmanii înrăiţi ai colaborării internaţionale, pe cei ce resping propunerile de dezarmare şi de interzicere a armei atomice, făcute de Uniunea Sovietică, pe cei ce fac totul pentru a împiedica restabilirea comerţului mondial, pe cei care finanţează, instruiesc şi trimit spioni şi complotişti pentru a face spionaj şi a organiza acte de teroare şi sabotaj pe teritoriul U.R.S.S. şi al ţărilor de democraţie populară.

Poporul nostru, pînă nu de mult rob al trusturilor străine, capitaliştilor şi moşierilor romîni, este azi un popor liber, stăpîn pe soarta sa.

Nu a fost uşor să ajungem aici. Astăzi însă, poporul romîn începe să culeagă roadele grelelor lupte pe care le-a dus pentru independenţa naţională şi o adevărată democraţie, roadele sacrificiilor

şi jertfelor de sînge pe care le-a dat, roadele muncii sale pline de abnegaţie.

Cu ajutorul puternic şi multilateral al Uniunii Sovietice, economia noastră înregistrează un avînt inaccesibil chiar celor mai dezvoltate ţări capitaliste. Agricultura noastră realizează însemnate progrese. Mereu apar pe întinsul patriei noastre, noi fabrici şi uzine, noi întovărăşiri şi gospodării agricole colective, noi şcoli, cămine culturale şi instituţii de ocrotire a sănătăţii, noi succese în dezvoltarea ştiinţei şi culturii. Cu toate greutăţile ce mai întîmpinăm, facem mereu noi paşi înainte pe calea ridicării nivelului de trai al maselor muncitoare, căci toate strădaniile noastre, toată activitatea partidului şi a statului democrat-popular, sînt puse în slujba oamenilor muncii, a satisfacerii tot mai largi a nevoilor lor materiale şi spirituale.

Minunatele succese sînt roadele aplicării învăţăturilor marxist-leniniste în politica partidului nostru, sînt roadele strînsei prietenii cu marea Uniune Sovietică şi ale colaborării cu ţările-surori de democraţie populară.

Milioanele de oameni ai muncii din ţara noastră, demonstrează cu ocazia zilei de 1 Mai — pentru pace — deoarece ei ştiu bine că pacea este cel mai favorabil factor pentru ca viaţa lor şi a copiilor lor să urce cele mai înalte culmi. Deaceia, ei sprijină din tot sufletul politica de pace a guvernului lor, politică inspirată din năzuinţele şi interesele vitale ale poporului nostru, care, alături de politica externă a marii Uniuni Sovietice şi a ţărilor de democraţie populară, constituie o contribuţie activă la întărirea păcii.

1 Mai 1954 pune odată mai mult în lumină contrastul izbitor dintre viaţa milioanelor de oameni ai muncii din ţările lagărului democraţiei şi socialismului — oameni liberi, însufleţiţi de un puternic sentiment de bucurie în faţa victoriilor pe care le-au dobîndit prin munca lor paşnică creatoare, închinată unei vieţi fericite — şi viaţa oamenilor muncii din ţările capitaliste, apăsaţi de exploatare şi de povara militarizării economiei naţionale, loviţi de şomaj şi de mizerie, de măsurile de fascizare din ţările lor.

In ziua de 1 Mai poporul nostru strîns unit în jurul Partidului şi Guvernului, plin de entuziasm, îşi trece în revistă marile lui realizări îndreptîndu-şi cu nemărginită dragoste şi recunoştinţă gîndurile către măreaţa Uniune a Republicilor Sovietice Socialiste, hotărît să întărească mereu prietenia şi alianţa dintre Republica Populară Romînă şi Uniunea Sovietică — izvor nesecat de victorii pentru Poporul Romîn.

Trăiască 1 Mai, ziua solidarităţii internaţionale a celor ce muncesc, ziua frăţiei muncitorilor din toate ţările!

Sub steagul lui Marx—Engels—Lenin—Stalin înainte spre victoria socialismului în patria noastră!

IN AJUTORUL TINERILOR CARE SE PREGĂTESC SĂ INTRE IN INSTITUTELE DE INVĂŢĂMÎNT SUPERIOR

DESPRE FACULTĂŢILE DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

Principala sarcină a învăţămîntului superior este de a pregăti cadre temeinice, care să stăpînească ştiinţa şi tehnica nouă, pentru a putea contribui activ la construirea socialismului în patria noastră. Tineretul trebuie să-şi însuşească acea ştiinţă care serveşte interesele poporului şi este legată în mod indisolubil de practică, de producţie, să pună la baza activităţii lui învăţătura cea mai înaintată, teoria lui Marx, Engels, Lenin şi Stalin.

In munca de construire a socialismului, matematica şi fizica au un rol deosebit de important. Numeroase probleme ridică dezvoltarea industriei din patria noastră, matematicii şi fizicii.

Oamenii noştri de ştiinţă, profesorii noştri, pătrunşi de rolul ştiinţei în uriaşa muncă de construire a unei vieţi noi, fericite, pătrunşi de rolul unităţii dintre teorie şi practică, pun la baza activităţii lor principiile ştiinţei sovietice, cea mai

înaintată ştiinţă din lume, contribuie la dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii din patria noastră, luptă cu consecvenţă şi hotărîre împotriva idealismului şi cosmopolitismului în domeniul matematicii şi fizicii, duc o muncă perseverentă, de zi cu zi, pentru a creşte cadre noi de fizicieni şi matematicieni, legaţi de popor, de interesele lui.

Matematica şi fizica constituie două sisteme ştiinţifice de cercetare a lumii materiale şi a materiei în mişcare. Ele tind să descopere anumite legi obiective ale naturii, care urmează a fi puse în slujba ridicării bunei stări şi a unei vieţi fericite pentru oamenii muncii. De aceea aceste ştiinţe au un rol deosebit în munca de construire a socialismului.

Facultăţile de matematică şi fizică din patria noastră au rolul de a pregăti cadre pentru învăţămîntul superior şi mediu, ca şi cercetători pentru institutele Academiei R.P.R. şi marile laboratoare de fizică din industrie. Aceste elemente au sarcina de a contribui cu tot entuziasmul lor la progresul ştiinţei. Ele pregătesc oameni de ştiinţă legaţi de nevoile producţiei, dezvoltă dragostea faţă de patria noastră, pregătesc elemente care pun toată ştiinţa lor în munca de construire a socialismului, în slujba păcii şi a progresului.

Din grija Partidului şi a Guvernului s-au creat condiţii de studii din ce în ce mai bune. Studenţilor care obţin rezultate bune la învăţătură, li se acordă burse de stat, burse republicane sau burse «*Gh. Gheorghiu-Dej*». Studenţii au la dispoziţie biblioteci bine înzestrate şi laboratoare utilate din ce în ce mai bine. Cadrele didactice se străduiesc prin toate mijloacele să dea studenţilor o cît mai bună pregătire, astfel încît, ei să devină utili în munca uriaşă de construire a socialismului în patria noastră. Încă din facultate studenţii sînt antrenaţi în munca de cercetare ştiinţifică.

Studenţii au la dispoziţie şi folosesc din ce în ce mai mult în studiul lor, lucrări de specialitate sovietice, însuşindu-şi astfel, orientarea şi principiile de bază ale celei mai înaintate ştiinţe, a ştiinţei sovietice.

Ne propunem să facem cunoscut tinerilor care se pregătesc să intre în învăţămîntul superior, modul cum funcţionează unele din aceste institute, pentru a-i înarma cu o temeinică cunoaştere a lor.

In cele ce urmează, prezentăm cititorilor, felul cum este organizată Facultatea de Matematică şi Fizică a Universităţii «C. I. Parhon» din Bucureşti.

Facultatea de Matematică şi Fizică are patru secţii: 1) Secţia de Matematică, 2) Secţia de Mecanică, 3) Secţia de Astronomie, 4) Secţia de Fizică. Durata studiilor este de 5 ani.

1. *Secţia Matematică* pregăteşte specialişti în domeniul ecuaţiilor diferenţiale, teoriei probabilităţilor şi statisticii matematice, teoriei funcţiilor de variabilă reală şi complexă şi în domeniul geometriei superioare.

După cum se ştie, matematica studiază probleme teoretice şi practice de cea mai mare importanţă avînd ca scop îmbogăţirea cunoştinţelor teoretice generale şi rezolvarea unor probleme de aplicaţii practice imediate. Matematica are un domeniu vast de aplicaţii în toate ştiinţele naturii şi în tehnică.

Progresele fizicii teoretice, ale mecanicii cereşti, dezvoltarea teoriei elasticităţii, a hidrodinamicii, crearea aviaţiei moderne, ar fi fost imposibile fără instrumentele de cunoaştere ale matematicii. Intrepătrunderea ştiinţelor matematice, fizice şi tehnice este aşa de mare, încît în multe domenii nu se poate spune unde încetează interesul pur matematic şi începe cel fizic sau tehnic, sau unde încetează cel fizic şi începe interesul matematic. Astfel, în teoria ecuaţiilor diferenţiale, domină fie un aspect propriu zis matematic, fie unul mecanic, fie unul electric sau tehnic. Teoria tensorilor născută din studiul de origină şi de interes predominant tehnic al elasticităţii, domină azi, ramuri întregi ale fizicii şi matematicii pure, în acelaşi timp. Teoriile hidrodinamicii de origină precumpănitor tehnică, constituie tot aşa de bine capitole fundamentale ale fizicii ca şi ale matematicii. Teoria modernă a stabilităţii dezvoltată de M. Liapunov, de origină precumpănitoare matematică şi-a găsit aplicaţii în teoria perturbaţiilor, în rezolvarea unor probleme ale mecanicii atomului, în teoria oscilaţiilor neliniare, care reprezintă baza teoretică a radiotehnicii moderne.

Din aceste cîteva exemple se vede importanţa deosebită pe care o are studiul matematicii, cît de greu este de arătat unde se termină matematica şi unde începe aplicarea ei.

Studiile din domeniul fizicii matematice şi-au găsit aplicarea practică la calcularea şi construirea aparatelor electronice, complicate, a microscoapelor electronice, etc.

Analiza funcţională care s-ar părea că este complet abstractă, a fost folosită de matematicienii sovietici cu succes la rezolvarea unor probleme absolut practice în legătură cu metodele raţionale de tăiere a metalelor, pentru fabricarea ţevilor şi cu organizarea de transportoare feroviare ieftine.

Chiar cel mai abstract dintre domeniile matematicii, logica matematică, a găsit apli-

caţii în problemele de automatizare, telemecanică, etc.

Ştiinţele naturii şi cele tehnice pun continuu noi probleme ce trebuie rezolvate.

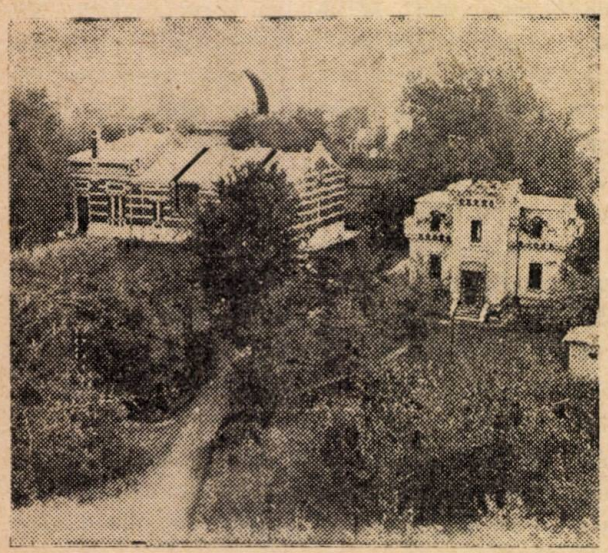
2. *Secţia de Mecanică* pregăteşte specialişti în domeniul mecanicii aplicate, hidrodinamicii, aerodinamicii, teoriei elasticităţii. Printre cursurile care se predau, deosebim: dinamica gazelor, teoria aripei de anvergură finită şi teoria elicei, dinamica zborului, teoria valurilor, teoria matematică a plasticităţii, etc.

Sînt cunoscute cercetările din domeniul aerodinamicii şi aplicaţiile lor în aviaţie. Mişcările subsonice, sonice şi supersonice necesită însă metode de cercetare diferite şi pun nenumărate probleme noi, ce trebuie rezolvate de cercetători.

Teoria elasticităţii, ramură a fizicii moderne, studiază acţiunea forţelor asupra corpurilor elastice. Aceasta tinde să trateze problemele după o metodă mai generală şi mai exactă ca teoria rezistenţei materialelor. Au aplicaţii practice imediate. Rezolvarea problemelor cu ajutorul teoriei elasticităţii fiind complicată, oferă un vast cîmp de cercetare.

Aplicaţii nenumărate se pot enumera în problemele de mecanică generală, în hidrodinamică, aplicaţiile la construcţia barajelor sau hidrocentralelor, aplicaţiile termo şi vîscoelasticităţii, etc.

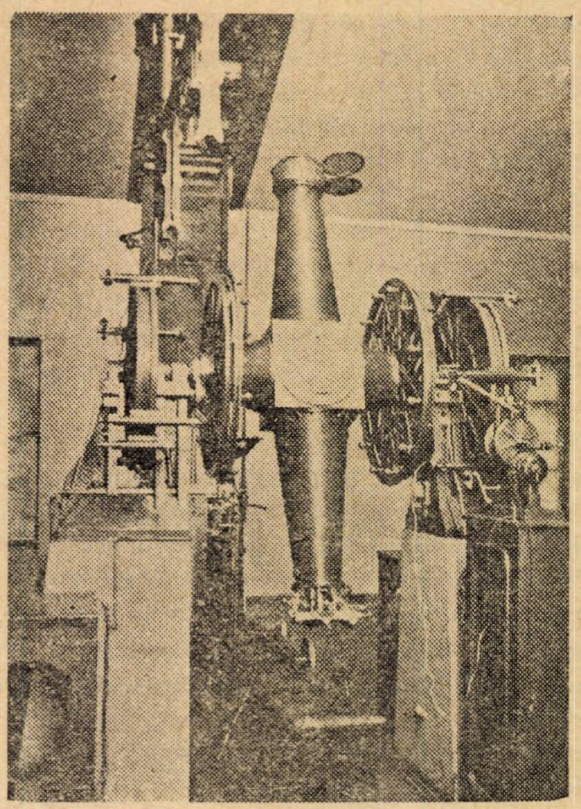
Toate aceste probleme de mecanică sînt strîns legate de cele mai noi descoperiri din domeniul analizei matematice, de problemele care se pun



Observatorul astronomic din Bucureşti

în tehnică, cu aplicaţii imediate şi dau totodată un nou avînt însăşi cercetărilor matematice.

3. *Secţia de Astronomie* pregăteşte specialişti în astrofizică, mecanică cerească, seismologie şi gravi-



Cercul meridian (Observatorul astronomic Bucureşti)

metrie. De asemeni, se adîncesc cercetările moderne din domeniul cosmogoniei. In ţara noastră avem trei observatoare astronomice, la: Bucureşti, Cluj şi Timişoara.

Observatorul astronomic din Bucureşti este bine înzestrat şi oferă reale posibilităţi de muncă, cercetătorilor.

Observatorul din Bucureşti colaborează cu Academia de Ştiinţe din U.R.S.S. la întocmirea catalogului de stele slabe.

Observatorul are două secţii: astronomie şi seismologie. In cadrul secţiei de astronomie se lucrează la cercul meridian care serveşte la determinarea orei exacte şi la determinarea coordonatelor ecuatoriale ale stelelor şi la luneta ecuatorială care serveşte la fotografierea astrelor. După fotografiere se măsoară coordonatele rectangulare pe clişeu şi se trece la calculul coordonatelor ecuatoriale (ascensiunea dreaptă şi declinaţia).

De asemenea, se studiază petele solare care au aplicaţii importante în meteorologie, etc.

In cadrul secţiei de seismologie sînt studiate undele seismice, componentele lor orizontale şi verticale. Existenţa focarului seismic din Vrancea, cu traiectoriile sale seismice aproape verticale, complică aceste studii. Una din realizările acestei

secţii este determinarea ariilor de intensităţi macroseismice pe teritoriul R.P.R. şi a cărei importanţă este deosebită, mai ales în problema proiectărilor de noi construcţii.

Se studiază şi se adîncesc teoriile cosmogonice, mai ales teoria academicianului sovietic O. I. Schmidt. Rezolvarea problemei originii Pămîntului este una din problemele fundamentale ale ştiinţelor naturii, în special este importantă din punct de vedere al materialismului dialectic.

4. *Secţia de Fizică* pregăteşte specialişti în fizica teoretică, fizica atomică şi nucleară, optică şi electronică. Printre cursurile de specializare în fizica teoretică, sînt: mecanica cuantică şi relativistă, electrodinamica cuantică, teoria corpului solid, teoria generală a relativităţii, etc. Fizica teoretică a sintetizat un imens material experimental, a explicat numeroase fapte fizice, a prezis noi fenomene. Astfel, mecanica cuantică a lămurit multe legi esenţiale: legăturile chimice de valenţă, proprietăţile electrice şi magnetice ale corpurilor, capacitatea lor calorică, etc. Mecanica cuantică exprimă mai profund decît fizica clasică însuşirile materiei şi ale mişcării ei.

Fizica teoretică discută problemele cele mai importante ale cunoaşterii. Pentru aceasta trebuie însă, ca materialismul dialectic şi istoric să fie metoda conducătoare în interpretarea problemelor fizicii moderne.

In cadrul fizicii atomice şi nucleare se predau cursurile de: fizică nucleară, radioactivitate, structura moleculelor, fizica razelor X şi chimia fizică. Cu toţii cunoaştem astăzi, importanţa fizicii atomice moderne, care a fost numită de Lenin revoluţia modernă în ştiinţele naturii. Fizica atomică ne dezvăluie noi posibilităţi de a transforma natura în folosul omului.

Pentru specializarea în problemele de optică se studiază: optica fizică, optica geometrică, tehnica optică, spectroscopia, optica electromagnetică şi cuantică, descărcările în gaze, luminiscenţa.

Industria noastră cere specialişti în tehnica iluminatului, în construcţia aparatelor şi instrumentelor optice, în analiza luminiscentă. In industria noastră se folosesc din ce în ce mai mult metode optice de control. Pentru controlul constituţiei materialelor se foloseşte metoda spectroscopică calitativă şi cantitativă. De asemenea, se folosesc şi alte metode optice mai ales: calorimetria, nefelometria şi fotometria.

Dezvoltarea modernă a tehnicii implică nu numai cunoaşterea relaţiilor cantitative dintre diversele mărimi necesare calculelor ci şi o înţelegere mai adîncă şi multilaterală a naturii fizice a fenomenelor folosite în scopuri practice. Din această cauză, deşi electronica este studiată şi în cadrul institutelor tehnice, în cadrul facultăţii de matematică şi fizică, se dă o atenţie deosebită bazelor fizice.

In cadrul acestei specializări se predau cursurile de: electronică generală, optică electronică, descărcările în gaze, propagarea undelor electromagnetice, radiotehnica, fizica metalelor şi măsurările electrice.

Importanţa şi aplicaţiile electronicii în tehnică sînt bine cunoscute. Vom spune cîteva cuvinte despre fizica metalelor şi despre măsurările electrice. Fizica metalelor constituie baza tehnicii de astăzi. Se urmăreşte o cunoaştere complectă a proprietăţilor metalelor. Numai astfel vom şti unde şi în ce stare se pot întrebuinţa cu succes. Studiul însuşirilor metalelor nu este o problemă uşoară, deoarece ele nu sunt constante ci variază în funcţie de compoziţia materialului metalic şi de starea lui. Sesiunea Secţiilor de Ştiinţe Matematice şi Fizice şi de Ştiinţe Tehnice şi Chimice din cadrul Academiei R.P.R., a subliniat importanţa deosebită pe care o are fizica în industria metalurgică.

Pentru dezvoltarea industriei importante sînt măsurătorile care se fac. Măsurătorile juste asigură continuitatea producţiei, controlul colectiv al producţiei, posibilitatea utilizării pe scară largă a automatizării şi mecanizării produselor de fabricaţie, conduse dela distanţă. Măsurările electrice au un rol deosebit, sînt indisolubil legate de dezvoltarea ştiinţei şi tehnicii. In cadrul facultăţii se descriu construcţiile instrumentelor electrice, se examinează aplicabilitatea lor şi se dau noţiuni generale cu privire la măsurările electrice: măsurările magnetice, măsurările mărimilor neelectrice prin metode electrice şi telemăsurări.

Am insistat în cele de mai sus, asupra caracterului practic al matematicii şi fizicii, pentru a scoate în evidenţă rolul matematicii şi fizicii în dezvoltarea industriei, a tehnicii.

Absolvenţii facultăţilor de Matematică şi Fizică vor putea lucra în învăţămîntul superior (cadre didactice), în institutele de cercetări ale Academiei R.P.R., în institutele departamentale sau în laboratoarele industriale.

Facultăţi de Matematică şi Fizică funcţionează pe lîngă toate universităţile din ţară. La Universitatea « Alexandru Ion Cuza » din Iaşi se continuă tradiţia seminarului matematic, care a format numeroşi cercetători. Universitatea « Victor Babeş » din Cluj, formează specialişti pentru diferitele

domenii ale matematicii şi fizicii. Tinerele institute de învăţămînt superior, Universitatea « I. Bolyai » din Cluj (cu limba de predare maghiară) şi Institutul Pedagogic din Timişoara, ca şi secţiile de fizică şi matematică ale Institutelor Pedagogice de 2 ani din Bucureşti, Iaşi, Cluj, formează cadre didactice pentru învăţămîntul mediu şi şcolile de 7 ani, necesare ridicării permanente a nivelului ştiinţific din ţara noastră.

Acei dintre absolvenţii şcolilor medii, care doresc să urmeze facultăţi de matematică şi fizică, vor trebui să muncească cu perseverenţă, pentru a deveni reprezentanţii acelei ştiinţe care nu se izolează de popor, nu se ţine departe de popor, ci este gata să-l servească, este gata să transmită poporului toate cuceririle ştiinţei, este în serviciul poporului nu din constrîngere ci de bună voie, cu bucurie.

PROBLEMA INTERPOLĂRII

M. COTARIU
Asistent la Institutul Politehnic Bucureşti

1° *Introducere.* Un cetitor al «Revistei Matematice şi Fizice» a rezolvat în luna ianuarie anul curent, 14 probleme, în februarie tot 14 probleme, în mai 7 probleme, în august 21 probleme. Se pune întrebarea: cîte probleme a rezolvat în aprilie şi cîte va rezolva în octombrie?

La prima vedere problema aceasta pare mai curînd o ghicitoare şi dă impresia că este lipsită de un fundament ştiinţific.

Se va răspunde: ce legătură poate fi între numărul de probleme rezolvate în ianuarie, februarie, mai şi august, cu numărul de probleme rezolvate în aprilie şi octombrie? S-ar putea ca cetitorul respectiv să fi fost bolnav în aprilie şi deci, să fi fost împiedicat să lucreze, după cum s-ar putea ca în octombrie să lucreze excepţional de mult. Argumentele ar fi destul de puternice ca să clatine baza ştiinţifică a problemei noastre, dacă aceasta nu ar fi fundată pe un teren rezistent: *ipoteza ştiinţifică*, ce ne permite să presupunem că fenomenul respectiv (în cazul nostru, rezolvarea problemelor) *se petrece după o anumită lege.*

Să comparăm această problemă cu următoarea:

Un vehicul parcurge o anumită traiectorie. In prima oră parcurge 14 km, în ora a doua 14 km, în ora a cincea 7 km, în ora a opta 21 km. Cîţi km a mers în ora a patra şi în ora a zecea?

După cum se vede, cele 2 probleme sînt absolut la fel decît că numărul de probleme este înlocuit prin km şi numele lunei respective adică numărul de ordine al ei, prin numărul de ordine al orei respective.

Totuşi, sub forma ultimului enunţ problema pare mai accesibilă. Dece? Pentru că în ultimul enunţ este vorba de un fenomen mecanic, la care existenţa unei legi e mai evidentă. E mai simplu de presupus că spaţiul parcurs de vehicul e *funcţie* de timp şi că există o anumită lege de mişcare a vehiculului, decît că numărul de probleme rezolvate e funcţie de timpul respectiv şi că există o lege după care se rezolvă problemele.

Dar odată admisă *ipoteza existenţei acestor legi*, ambele probleme sînt la fel de rezolvabile şi chiar mai mult, dacă admitem legi similare, atunci ambele probleme conduc la aceleaşi rezultate.

Bine înţeles că în general nu vom avea de a face cu probleme similare cu prima, în care e discutabilă existenţa legii după care se petrece fenomenul respectiv.

Acest exemplu a fost ales special pentru a sublinia faptul că aceste probleme au un sens numai dacă *fenomenul respectiv*, descris în enunţ, *se petrece după o anumită lege.* Legea aceasta ar putea fi o lege rigidă, în cazul fenomenelor tipice, ca în ştiinţele naturii — Mecanică, Fizică, etc.— sau o lege stochastică, în cazul fenomenelor colective ce se studiază în Statistică — Demografie, Biometrie, etc.

2. *Cum se pune problema?* In general, problema se pune în următoarele împrejurări. Pe un şantier, într-un laborator, într-o uzină, într-un institut, etc., urmărind evoluţia unui fenomen, avem anumite date rezultate din măsurători.

De exemplu, vrem să cercetăm mersul unui tren, efectuarea unei presiuni, numărul de decese într-un colectiv, etc. Pentru aceasta efectuăm experienţe sau măsurători care ne dau spaţiul parcurs în anumite momente, presiunile la anumite temperaturi, etc. Cu aceste valori formăm tablouri şi problema care se pune este de a completa aceste tablouri: fie între elementele determinate — interpolare —, fie să le prelungim în afară — extrapolare. Bine înţeles că în toate aceste cazuri se presupune că există o lege după care se petrec

aceste fenomene, pe care noi, inițial, nu o cunoaștem.

Interpolarea constă tocmai din aflarea acestei legi și calculul valorilor ce ne interesează, de exemplu, aflarea legii de mișcare a vehiculului și calculul spațiului parcurs în anumite momente diferite de cele din enunț și deduse din cunoașterea datelor enunțului.

E clar însă, că problema astfel pusă e nedeterminată și *nu vom putea găsi legea respectivă decît făcînd anumite ipoteze asupra naturii ei*, de exemplu, făcînd ipoteza că legea să fie cea mai simplă posibilă sau legea să fie exponențială, etc.

Aceste legi sînt din punct de vedere matematic, niște funcțiuni de unul sau mai multe argumente — (variabile independente).

In cele ce urmează ne vom ocupa numai de legi care sînt funcții de un singur argument. Aceste lămuriri fiind date, putem da enunțul matematic al problemei interpolării, care e următorul:

Fiind date n valori ale argumentului:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \qquad (1)$$

și valorile corespunzătoare ale funcției (legii fenomenului respectiv):

$$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n \qquad (2)$$

să se găsească valorile funcției ce corespund altor valori ale argumentului.

Cu alte cuvinte e necesar ca din cunoașterea valorilor (1) și (2) să găsim funcția respectivă și apoi, cunoscînd funcția să determinăm valorile ei ce corespund altor valori ale argumentului.

In general, deoarece facem anumite ipoteze asupra funcției, valorile pe care trebuie să le determinăm vor fi aproximative și vor fi cu atît mai apropiate de realitate cu cît funcția presupusă se apropie mai mult de cea reală. Ipotezele asupra funcției sînt: ca aceasta să fie cea mai simplă posibilă — deci un polinom — ca aceasta să fie exponențială, logaritmică, sinusoidală, etc.

In cele ce urmează vom face ipoteza cea mai simplă și anume, că legea (funcția) să se exprime printr-un polinom, care capătă numele de polinom de interpolare. Deoarece ne-am plasat cu funcțiile în această ipoteză — « ipoteza polinomială » — problema interpolării devine determinată și de acum în colo, în loc de « funcție » vom spune « polinom ».

3. *Formula de interpolare a lui Lagrange.* Să se găsească un polinom de gradul n, cunoscînd valorile pe care le capătă pentru $n+1$, valori date ale argumentului.

Fie,

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n \qquad (1')$$

valorile argumentului și

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2),\ \ldots\ y_n = f(x_n) \qquad (2')$$

valorile corespunzătoare ale polinomului,

$$y = f(x) \qquad (3)$$

pe care vrem să-l aflăm.

Să rezolvăm mai întîi, o problemă mai simplă și anume, să găsim un polinom $f_0(x)$ care să fie egal cu y_0 pentru $x = x_0$ și cu zero pentru toate celelalte valori ale argumentului. Adică,

$$\begin{cases} f_0(x) = y_0 \text{ pentru } x = x_0 \\ f_0(x) = 0 \text{ pentru } x = x_1, x_2, \ldots, x_n \end{cases} \qquad (4)$$

Deoarece:

$$f_0(x_1) = 0,\ f_0(x_2) = 0,\ \ldots f_0(x_n) = 0 \qquad (5)$$

$f(x)$ fiind un polinom rezultă că $f(x)$ se împarte exact (e divizibil) cu $(x - x_1), (x - x_2), \ldots (x - x_n)$ adică cu produsul lor:

$$(x - x_1)\ (x - x_2)\ \ldots\ (x - x_n)$$

Însă noi considerăm polinomul cel mai simplu, adică de gradul cel mai mic posibil, deci de gradul n, așa că avem:

$$f_0(x) = K(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) \qquad (6)$$

rămînînd să determinăm coeficientul K.

Știm că $f_0(x_0) = y_0$, deci:

$$f_0(x_0) = K(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n) \qquad (7)$$

deci,

$$K = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)} \qquad (8)$$

Aceasta înseamnă că funcția pe care o căutăm în cazul particular definit de (4) este:

$$f_0(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_n)}. \qquad (9)$$

În același mod găsim și funcțiile $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ care sînt respectiv egale cu $y_1, y_2, \ldots, y_n$ pentru x respectiv egal cu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și egale cu zero pentru celelalte valori, adică:

$$\begin{cases} f_i(x) = y_i \text{ pentru } x = x_i \\ f_i(x) = 0 \text{ pentru } x \neq x_i \end{cases} \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \qquad (10)$$

Valorile acestora se capătă din (9) schimbînd indicele 0 cu i și i cu 0:

$$f_i(x) = y_i \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots}$$

$$\frac{\ldots (x - x_n)}{\ldots (x_i - x_n)} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad (11)$$

adică:

$$f_1(x) = y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)}$$

$$f_2(x) = y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)\dots(x_2-x_n)} \quad (12)$$

$$\vdots$$

$$f_n(x) = y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}$$

Făcînd suma polinoamelor astfel căpătate:

$$F(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) \quad (13)$$

găsim ca rezultat un polinom de gradul n care pentru $x = x_0$ ia valoarea y_0, pentru $x = x_1$, ia valoarea y_1, ... pentru $x = x_n$ ia valoarea y_n, în general pentru $x = x_i$ ia valorile y_i, căci:

$$F(x_i) = f_0(x_i) + f_1(x_i) + f_2(x_i) + \dots + f_n(x_i) = y_i \quad (14)$$

deoarece

$$f_0(x_i) = f_1(x_i) = f_2(x_i) = \dots = f_{i-1}(x_i) = f_{i+1}(x_i) = \dots = f_n(x_i) = 0 \text{ şi } f_i(x_i) = y_i$$

deci $F(x)$ e tocmai polinomul căutat $f(x)$.

Polinomul de interpolare va avea deci expresia:

$$f(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \quad (15)$$

sau

$$f(x) = \sum_{i=0}^{i=n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots} \cdot \frac{\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (16)$$

Aceasta constituie formula de interpolare a lui Lagrange.

Nu menţionăm aci forma mai simplă sub care s-ar putea pune formula lui Lagrange cu ajutorul derivatelor, deoarece pentru cetirea prezentului articol nu se presupune cunoaşterea derivatelor.

4. *Aplicaţii şi exemple. a)* Să rezolvăm problema cu vehiculul de mai sus, în ipoteza unei legi polinominale a spaţiului, adică:

Să se găsească un polinom $f(x)$ de gradul 3 ştiind că:

$$f(1) = 14, \quad f(2) = 14, \quad f(5) = 7, \quad f(8) = 21$$

şi apoi să calculăm $f(4)$ şi $f(10)$. Aplicăm formula lui Lagrange:

$$f(x) = 14\frac{(x-2)(x-5)(x-8)}{(1-2)(1-5)(1-8)} + 14\frac{(x-1)(x-5)(x-8)}{(2-1)(2-5)(2-8)} + 7\frac{(x-1)(x-2)(x-8)}{(5-1)(5-2)(5-8)} + 21\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(8-1)(8-2)(8-5)} =$$

$$= -\frac{14}{28}(x-2)(x-5)(x-8) + \frac{14}{18}(x-1)(x-5)(x-8) - \frac{7}{36}(x-1)(x-2)(x-8) + \frac{21}{126}(x-1)(x-2)(x-5) =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3 - 15x^2 + 66x - 80) + \frac{7}{9}(x^3 - 14x^2 + 53x - 40) - \frac{7}{36}(x^3 - 11x^2 + 26x - 16) + \frac{1}{6}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10) =$$

$$= \frac{1}{36}(-18x^3 + 270x^2 - 1188x + 1440 + 28x^3 - 392x^2 + 1484x - 1120 - 7x^3 + 77x^2 - 182x + 112 + 6x^3 - 48x^2 + 102x - 60) =$$

$$= \frac{1}{36}(9x^3 - 93x^2 + 216x + 372) = \frac{1}{12}(3x^3 - 31x^2 + 72x + 124)$$

$f(4) = 9$ km/oră , $f(10) = 62$ km/oră.

Observare. In ipoteza că rezolvarea problemelor de tipul celei din introducere se face după o lege polinomială — (ipoteză foarte aproximativă şi puţin justificată, dar simplificatoare) — rezultatul ar fi că în aprilie cetitorul a rezolvat 9 probleme şi în octombrie va rezolva 62 probleme.

b) Să se găsească un polinom de gradul II care pentru x egal pe rînd cu valorile α, β şi γ ia valorile a, b şi c. Aplicăm formula de interpolare:

$$f(x) = a\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + b\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + c\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

$$f(x) = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\{a(\gamma-\beta)[x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma] + b(\alpha-\gamma)[x^2-(\alpha+\gamma)x+\alpha\gamma] + c(\beta-\alpha)[x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta]\} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}\{[a(\gamma-\beta)+b(\alpha-\gamma)+c(\beta-\alpha)]x^2 - [a(\gamma^2-\beta^2)+b(\alpha^2-\gamma^2)+c(\beta^2-\alpha^2)]x + a(\gamma-\beta)\gamma\beta + b(\alpha-\gamma)\alpha\gamma + c(\beta-\alpha)\beta\alpha\}.$$

c) *Identităţile lui* Euler. Fie un polinom

$$f(x) = x^p. \quad (17)$$

Să dăm lui x valorile $x_0, x_1, x_2, \dots x_m$ | $f(x)$ va deveni $x_0^p, x_1^p, x_2^p \dots x_m^p$ | (18)

să presupunem $p \leqslant m$.

Fiind date valorile (18) să aplicăm formula de interpolare şi să scriem că polinomul de interpolare e identic cu x^p.

$$x^p \equiv x_0^p \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_m)} + x_1^p \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_m)} + \dots + x_m^p \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})} \quad (19)$$

facem $x=0$ şi simplificăm apoi, cu produsul $(-1)^m x_0 x_1 x_2 \dots x_m$ căpătăm:

$$\frac{x_0^{p-1}}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_m)} + \frac{x_1^{p-1}}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_m)} + \dots + \frac{x_m^{p-1}}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})} \equiv 0. \quad (20)$$

Deoarece p poate fi egal cu 1, 2, 3, ... m în această formulă sînt incluse m identităţi numite identităţile lui Euler.

Dacă notăm cu $\pi_i (x_0 - x_i)$ produsele $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_m)$ atunci (20) devine:

$$\frac{x_0^{p-1}}{\pi_i (x_0 - x_i)} + \frac{x_1^{p-1}}{\pi_i (x_1 - x_i)} + \dots + \frac{x_m^{p-1}}{\pi_i (x_m - x_i)} \equiv 0 \quad (p = 1, 2, 3, \dots, m) \quad (21)$$

sau

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{x_k^{p-1}}{\pi_i (x_k - x_i)} \equiv 0 \qquad (p = 1, 2, \dots, m). \quad (22)$$

Exemple. Pentru $x_0 = a$, $x_1 = b$ $p = 1$ avem identitatea:

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-a} = 0 \quad (23)$$

evidentă.

Pentru $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = c$; $p = 1, 2$, avem identităţile:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)} \equiv 0. \quad (24)$$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \equiv 0. \quad (25)$$

Pentru $x_0 = a$, $x_1 = b$, $x_2 = c$, $x_3 = d$ şi $p = 1, 2, 3$ avem identităţile:

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)} \equiv 0. \quad (26)$$

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)} \equiv 0. \quad (27)$$

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)} \equiv 0 \quad (28)$$

şi aşa mai departe.

d) Să rezolvăm următoarea problemă:

Cunoscînd resturile împărţirii unui polinom $P(x)$ prin binoamele $x-a$; $x-b$; $x-c$; ...; $x-l$ să găsim restul împărţirii polinomului prin produsul binoamelor.

Fie n numărul binoamelor. Restul căutat va fi de gradul $n-1$. Avem relaţia:

$$P(x) = Q(x)(x-a)(x-b)\dots(x-l) + R(x). \quad (29)$$

Pentru
$$\begin{aligned} x &= a \quad R(a) = P(a) \\ x &= b \quad R(b) = P(b) \\ &\vdots \\ x &= l \quad R(l) = P(l). \end{aligned} \quad (30)$$

Dar $P(a)$, $P(b) \dots P(l)$ sunt resturile împărţirii polinomului $P(x)$ prin $(x-a)$; $(x-b)$; ...; $(x-l)$ şi deci cunoscute din enunţ, deci cunoaştem şi cantităţile $R(a)$, $R(b)$, ... $R(l)$.

Cunoscînd valorile pe care le ia polinomul $R(x)$ de grad $n-1$ pentru x egal cu $a, b, \dots, l$, putem determina polinomul (restul) prin formula de interpolare a lui Lagrange:

$$R(x) = P(a)\frac{(x-b)(x-c)\dots(x-l)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)} + P(b)\frac{(x-a)(x-c)\dots(x-l)}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)} + \dots + P(l)\frac{(x-a)(x-b)\dots(x-k)}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)}. \quad (31)$$

Alte identităţi. e) Pornind dela un polinom cunoscut şi aplicîndu-i formula de interpolare, găsim unele identităţi interesante.

Astfel, să aplicăm formula lui Lagrange polinomului

$$y = f(x) = x \text{ pentru } \begin{matrix} x = 1, 2, 3, \dots, n \\ y = 1, 2, 3, \dots, n \end{matrix} \quad (32)$$

deci, polinomul de interpolare este:

$$x = 1\frac{(x-2)(x-3)\dots(x-n)}{(1-2)(1-3)\dots(1-n)} + 2\frac{(x-1)(x-3)\dots(x-n)}{(2-1)(2-3)\dots(2-n)} + \dots + n\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{(n-1)(n-2)\dots 1}$$

deci:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} = \frac{1}{(-1)^{n-1}(n-1)!}\frac{1}{(x-1)} + \frac{2}{(-1)^{n-1}(n-2)!}\frac{1}{x-2} + \frac{3}{(-1)^{n-3}2!(n-3)!}\frac{1}{(x-3)} + \dots + \frac{n}{(n-1)!}\frac{1}{(x-n)} = \sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{(-1)^{n-i}(i-1)!(n-i)!}\frac{1}{(x-i)} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{i=n}(-1)^{n-i} i C_{n-1}^{i-1}\frac{1}{(x-i)}.$$

Deci avem identitatea:

$$\frac{x}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} \equiv \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{n}{x-n} - \frac{(n-1)C_{n-1}^{1}}{x-n+1} + \frac{(n-2)C_{n-2}^{2}}{x-n+2}\dots\right] \tag{33'}$$

care ne dă descompunerea fracției raționale din membrul stîng în elemente simple.

f) Să pornim dela polinomul:

$$y = n + 1 - x \tag{34}$$

lui $x = 1, 2, 3, \dots, n$
îi corespunde $y = n, n-1, n-2, \dots, 1$ } (35)

Polinomul de interpolare ne dă:

$$n+1-x = n\frac{(x-2)(x-3)\dots(x-n)}{(1-2)(1-3)\dots(1-n)} + (n-1)\frac{(x-1)(x-3)\dots(x-n)}{(2-1)(2-3)\dots(2-n)} + \dots + 1\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}{(n-1)(n-2)\dots 1} \tag{35'}$$

deci:

$$\frac{n+1-x}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} \equiv \frac{n}{(-1)^{n-1}0!(n-1)!(x-1)} + \frac{n-1}{(-1)^{n-2}1!(n-2)!(x-2)} + \dots + \frac{n-i+1}{(-1)^{n-i}(i-1)!(n-1)!(x-i)} + \dots + \frac{2}{(n-2)!1!(x-n+1)} + \frac{1}{(n-1)!0!(x-n)} \tag{36}$$

deci:

$$\frac{n+1-x}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} \equiv \frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{1C_{n-1}^{0}}{x-n} - \frac{2C_{n-1}^{1}}{x-n+1} + \frac{3C_{n-1}^{2}}{x-n+2} + \dots + (-1)^{n-i}\frac{(n-i+1)C_{n-1}^{n-i}}{x-i} + \dots + (-1)^{n-2}\frac{(n-1)C_{n-1}^{n-2}}{x-2} + (-1)^{n-1}\frac{nC_{n-1}^{n-1}}{x-1}\right]$$

$$\frac{n+1-x}{(x-1)(x-2)\dots(x-n)} \equiv \equiv \frac{1}{(n-1)!}\sum_{i=n}^{i=1}(-1)^{n-i}\frac{(n-i+1)nC_{n-1}^{n-i}}{x-i}. \tag{37}$$

g) *Aplicație la descompunerea unei fracții raționale.* Fie fracția rațională:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)(x-b)\dots(x-l)}$$

gradul lui $\varphi(x)$ fiind mai mic decât gradul numitorului, avînd la numitor un polinom cu toate rădăcinile reale și simple, adică

$$a \neq b \neq c \neq \dots \neq l.$$

Aplicăm formula lui Lagrange polinomului:

$$\varphi(x) = \varphi(a)\frac{(x-b)(x-c)\dots(x-l)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)} + \varphi(b)\frac{(x-a)(x-c)\dots(x-l)}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)} + \dots + \varphi(l)\frac{(x-a)(x-b)\dots(x-k)}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)}.$$

Impărțind în ambii membri cu produsul

$$(x-a)(x-b)\dots(x-l)$$

avem:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)(x-b)\dots(x-l)} = \frac{\varphi(a)}{(a-b)(a-c)\dots(a-l)}\frac{1}{(x-a)} + \frac{\varphi(b)}{(b-a)(b-c)\dots(b-l)}\frac{1}{(x-b)} + \dots + \frac{\varphi(l)}{(l-a)(l-b)\dots(l-k)}\frac{1}{(x-l)} \tag{38}$$

formulă care ne dă descompunerea fracției în elemente simple.

5. *Exerciții.* 1° Să se găsească un polinom care pentru x egal cu 2,5, 7 și 11 capătă valorile 1, 2, 3 și 4.

2° Să se găsească polinomul de gradul cel mai mic posibil care pentru x egal cu 2, −3, 6, −7 și 13 capătă aceeași valoare 5.

3° Să se găsească polinomul care are ca rădăcini pe -1, 2, -5, 6 şi care pentru x egal cu 7 este egal cu 2.

4° Să se demonstreze identităţile următoare între literele a, b, c, d, e:

$$\sum \frac{a^i}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)} \equiv 0$$

i fiind egal pe rînd cu 0, 1, 2, 3.

5° Să se găsească restul împărţirii unui polinom prin produsul

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$$

ştiind că resturile împărţirii polinomului prin $x+1$; $x-2$; $x+3$; $x-4$ sînt 2, -3, 4, 5.

6. *Formula de interpolare a lui* Newton. Am văzut că formula de interpolare a lui Lagrange ne dă un polinom de gradul n cunoscînd valorile pe care le ia pentru $n+1$ valori ale argumentului.

Un caz interesant şi care se întîlneşte des în practică este acela în care valorile argumentului sînt echidistante, adică, în progresie aritmetică. În acest caz e mai comod de lucrat cu formula de interpolare a lui Newton.

Fie $n+1$ valori ale argumentului:

$$x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h,\ \ldots,\ x_n = x_0 + (n-1)h \tag{39}$$

şi valorile corespunzătoare ale polinomului respectiv:

$$f_{x_0},\ f_{x_1},\ f_{x_2},\ \ldots,\ f_{x_n} \tag{40}$$

Am văzut în articolul «Calculul cu diferenţe finite» din R.M.F. nr. 12/1953, că:

$$U_n = (1+\Delta)^n U_0$$

la fel şi:

$$f_{x_0+nh} = (1+\Delta)^n f_{x_0} \tag{41}$$

adică:

$$\begin{aligned} f_{x_0+nh} &= f_{x_0} + C_n^1 \Delta f_{x_0} + C_n^2 \Delta^2 f_{x_0} + \ldots \\ &\ldots + C_n^i \Delta^i f_{x_0} + \ldots + C_n^n \Delta^n f_{x_0} = \\ &= f_{x_0} + \frac{n}{1}\Delta f_{x_0} + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 f_{x_0} + \ldots \\ &\ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-i+1)}{i!}\Delta^i f_{x_0} + \ldots \end{aligned} \tag{41'}$$

Să notăm:

$$x_0 + nh = x \tag{42}$$

deci:

$$\begin{aligned} n &= \frac{x-x_0}{h},\ n-1 = \frac{x-x_0-h}{h} = \frac{x-(x_0+h)}{h} = \\ &= \frac{x-x_1}{h};\ \ldots\ n-2 = \frac{x-x_2}{h}\ \ldots\ n-i = \frac{x-x^i}{h} \end{aligned} \tag{43}$$

Cu aceste notaţii formula (41') devine:

$$\begin{aligned} f_x &= f_{x_0} + \frac{x-x_0}{1!\,h}\Delta f_{x_0} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!\,h^2}\Delta^2 f_{x_0} + \\ &+ \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})}{i!\,h^i}\Delta^i f_{x_0} + \\ &+ \ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{n!\,h^n}\Delta^n f_{x_0}. \end{aligned} \tag{44}$$

Aceasta e formula de interpolare a lui Newton. Formula se scrie condensat, astfel:

$$f_x = f_{x_0} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})}{i!\,h^i}\Delta^i f_{x_0}. \tag{45}$$

Această formulă ne dă polinomul de interpolare căutat în funcţie de valorile echidistante ale argumentului şi de diferenţele succesive ale lui f_{x_0}. Din această cauză, ca să utilizăm această formulă e necesar ca în prealabil să calculăm diferenţele lui f_{x_0}.

7. *Observare.* In cazurile în care putem aplica şi formula lui Lagrange şi formula lui Newton, vom căpăta aceleaşi rezultate, deoarece ambele sînt polinoame de grad n şi au aceleaşi valori pentru $n+1$ valori ale argumentului.

8. *Exemplu.* Să se determine un polinom care pentru x egal cu 1, 2, 3 ,4 are valorile 5, 1, -2, 3.

Polinomul va fi de gradul 3 şi aplicînd formula avem:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(1) + \frac{x-1}{1!\,1}\Delta f(1) + \frac{(x-1)(x-2)}{2!\,1^2}\Delta^2 f(1) + \\ &+ \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!\,1^3}\Delta^3 f(1). \end{aligned}$$

Facem tabloul diferenţelor:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
1	5	-4	1	7
2	1	-3	8	
3	-2	5		
4	3			

deci:

$$\begin{aligned} f(x) &= 5 - 4(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \\ &+ \frac{7}{6}(x-1)(x-2)(x-3) = 5 - 4x + 4 + \\ &+ \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}x + 1 + \frac{7}{6}x^3 - 7x^2 + \frac{77}{6}x - 7 = \\ &= \frac{7}{6}x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{22}{3}x + 3. \end{aligned}$$

Să se rezolve aceeaşi problemă cu formula de interpolare a lui Lagrange:

$$f(x) = 5\frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{(1-2)(1-3)(1-4)} + 1\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(2-1)(2-3)(2-4)} -$$

$$- 2\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(3-1)(3-2)(3-4)} + 3\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(4-1)(4-2)(4-3)}$$

deci:

$$f(x) = -\frac{5}{6}(x^3 - 9x^2 + 26x - 24) +$$

$$+ \frac{1}{2}(x^3 - 8x^2 + 19x - 12) + (x^3 - 7x^2 +$$

$$+ 14x - 8) + \frac{1}{2}(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) =$$

$$= \frac{7}{6}x^3 - \frac{13}{2}x^2 + \frac{22}{3}x + 3$$

acelaşi rezultat ca mai sus.

9. *Exerciţii.*

6° Să se determine polinomul care pentru x egal cu -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 capătă valorile 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

7° Să se determine polinomul care pentru x egal cu 0, 2, 4, 6 ia valorile 1, 3, 5, 7.

8° Să se determine polinomul care pentru x egal cu a, 2a, 3a şi 4a capătă valorile b, 2b, 3b, 4b.

9° Cunoscînd logaritmii zecimali ai numerelor dela 250 la 300 cu 5 zecimale, să se calculeze cu ajutorul formulei lui Newton logaritmii numerelor dela 271 la 280.

10. *Aspectul geometric al problemei interpolării.* Utilizînd corespondenţa dintre cantităţile x şi $f(x)$

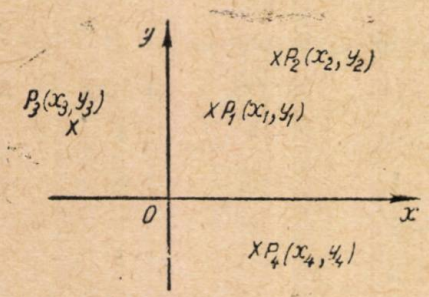


Fig. 1

cu coordonatele punctelor din plan, care stă la baza Geometriei Analitice, vom căpăta o reprezentare foarte clară a problemei interpolării. Singura dificultate care ar putea apare constă în faptul că nu orice funcţie (legea fenomenului respectiv) se poate reprezenta analitic. Funcţiunile care apar în mod curent în practică nu intră în mod obişnuit în această categorie, de aceea vom lucra numai cu funcţii reprezentabile analitic.

Vom considera valorile lui x ca abscisele unor puncte şi valorile corespunzătoare ale lui y ca ordonatele aceloraşi puncte. Deci, rezultatele măsurătorilor le vom consemna în tablouri sau grafice prin punctele $P_i(x_i, y_i)$.

Legile după care se petrec fenomenele respective (funcţiile) vor arăta grafic legătura între x şi y, deci, vor fi nişte curbe. Deoarece aceste funcţii iau valorile y_i pentru x_i, înseamnă că coordonatele $P_i(x_i, y_i)$ satisfac aceste ecuaţii, deci curbele trec prin punctele P_i.

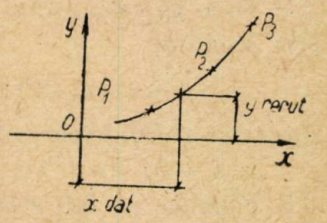


Fig. 2

De aceea din punct de vedere geometric problema interpolării se enunţă astfel:

Fiind date $n+1$ puncte, să se găsească ordonatele ce corespund unor abscise date, diferite de cele ale celor $n+1$ puncte date.

Pentru a găsi aceste abscise trebuie mai întîi

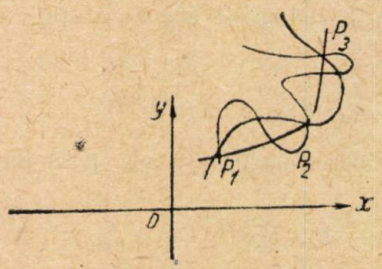


Fig. 3

să unim punctele date printr-o curbă şi apoi să ducem intersecţiile acesteia cu paralelele la axa Oy prin abscisele date şi să măsurăm aceste ordonate fig. 2.

Aci apare şi mai evidentă nedeterminarea problemei, căci prin punctele date se pot trasa o infinitate de funcţii fig. 3.

De aceea este necesar să ne dăm condiţii suplimentare, ca de exemplu: curba să fie o dreaptă dacă e posibil, o parabolă de grad n, o exponenţială, etc. Cel mai simplu mod e de a lua curba cea mai simplă adică aceea de gradul n cunoscînd $n+1$ puncte ale ei, numită parabola de gradul n, de ecuaţie:

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_ix^{n-i} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1}x + a_n \qquad (46)$$

adică, y = polinom de gradul n.

Expresia acestui polinom e dată de formula lui Lagrange sau de formula lui Newton.

Dacă cunoaştem două puncte, curba va fi dreapta care le uneşte şi funcţia are expresia:

$$y = y_0 \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1 \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \qquad (47)$$

adică

$$\frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

ecuaţia dreptei prin 2 puncte date, din Geometria Analitică.

Dacă cunoaştem 3 puncte, curba va fi o parabolă de gradul doi, reprezentare cunoscută a trinomului de gradul II.

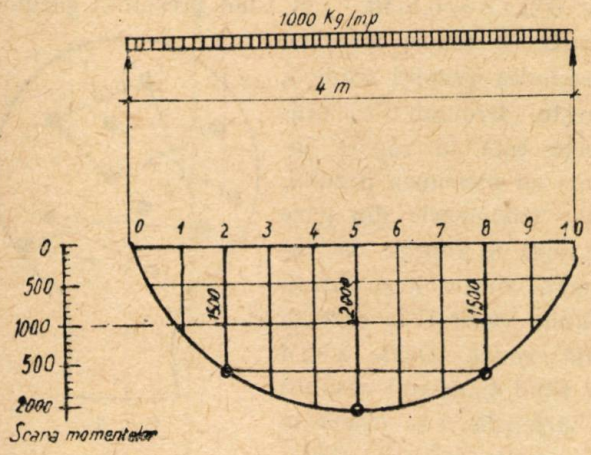


Fig. 4

Dacă cunoaştem $n + 1$ puncte, curba va fi o parabolă de gradul n. Reprezentarea grafică are mare importanţă practică, deoarece ne scuteşte de calcule. Unim punctele date cu o linie continuă cît mai simplă şi apoi măsurăm grafic ordonatele ce corespund absciselor date.

11. *Exemplu.* Cunoscîndu-se valorile momentelor încovoietoare într-o grindă simplu rezemată, de 4 m, supusă la o sarcină uniform distribuită, de 1000 kg/ml în secţiunile dela 1/4, 1/2 şi 3/4 din deschidere — şi anume egale respectiv cu 1500 kgm, 2000 kgm şi 1500 kgm. să se găsească prin interpolare grafică, momentul la toate zecimile din deschidere (fig. 4).

Desenăm grinda la o scară oarecare şi momentele încovoietoare date la o anumită scară. Unim punctele date de enunţ printr-o curbă continuă — avînd 3 puncte, ducem o parabolă de gradul 2. Cetim apoi, cu ajutorul scării momentelor în dreptul fiecărei zecimi — numerotate dela 0 la 10 — valoarea momentului încovoietor respectiv.

12. *Exerciţiu.* Să se găsească prin interpolare grafică, momentele încovoietoare din zecime în zecime, într-o grindă simplu rezemată de 6 m, deschidere încărcată cu o sarcină uniform repartizată de 1500 kg/ml ştiind că momentele încovoietoare în capete sînt nule şi la 1/3 şi 2/3 din deschidere sînt egale cu 6000 kgm.

PRESIUNI JOASE ŞI PRESIUNI INALTE

PROF. FLORICA POPESCU

Presiunea este unul din factorii care influenţează în mare măsură desfăşurarea multor fenomene fizice şi chimice. Variind presiunea într-un anumit fel se poate da fenomenelor fizice un anumit sens de evoluţie. Prin destinderea unui gaz dela o presiune mare la alta mică se poate produce lucru mecanic, măsurat prin produsul dintre presiune şi variaţia de volum, încît presiunea apare ca unul dintre cei doi factori ai energiei, factorul de intensitate.

In tehnică se folosesc presiuni obişnuite, adică, în jurul valorii de o atmosferă, presiuni foarte mici numite deobicei « vid » — de ex. în lămpile electronice, în becuri, etc. şi presiuni foarte înalte, ca de ex. la sintezele chimice, frînele automate, diferite prese, etc.

Folosirea presiunilor joase sau înalte pune şi problema măsurării lor.

In articolul de faţă vom căuta să arătăm cum se obţin în laborator şi cum se măsoară, atît presiunile înalte cît şi cele joase.

Existenţa presiunii atmosferice este cunoscută abia din secolul al XVI-lea. Ea a fost descoperită în următoarea împrejurare: observînd funcţionarea pompelor cu apă, s-a constatat că apa se ridică în pompe numai pînă la o anumită înălţime şi anume, pînă la aproximativ 10 metri. Ridicarea apei în aceste pompe se explica în evul mediu, printr-o forţă ocultă numită « groaza de vid »

Observaţia că apa se ridică însă, în pompe numai pînă la înălţimea de 10 metri, a stîrnit mare vîlvă căci nu se putea explica dece « groaza de vid » încetează deasupra acestei înălţimi. Experienţa lui Toricelli (1643), dovedeşte însă, că aerul are greutate şi de aceea apasă asupra cor-

purilor, deci şi asupra apei pe care o ridică în pompe. Presiunea aerului este de 1033 gf/cm² şi poate fi echilibrată de apăsarea unei coloane de apă înaltă de 10,5 m, ceea ce înlătură acea forţă misterioasă şi constituie explicarea ştiinţifică a funcţionării pompelor de apă.

Peste cîţiva ani (1650) se construieşte prima maşină pneumatică, cu ajutorul căreia s-a putut rarefia aerul deci, s-au produs presiuni mici. Perfecţionările aduse acestei pompe prin păsuirea pistonului şi potrivirea supapelor nu au dus însă la o pompă care să dea un vid înaintat. Progresele realizate de tehnică implică şi perfecţionarea tehnicii vidului, mai ales cînd electrotehnicianul rus Lodîghin inventează becul electric (1873) şi cînd fizicianul rus Stoletov descoperă celula fotoelectrică (1887), care necesită un vid înaintat. Perfecţionarea pompelor de vid corespunzător acestor noi cerinţe nu se putea realiza numai printr-o perfecţionare mecanică a pompelor obişnuite, ci era nevoie de pompe bazate pe principii noi, care nu puteau fi construite fără cunoaşterea proprietăţilor gazelor.

Teoria cinetico-noleculară a gazelor perfecte, fundată de M. V. Lomonosov, a îndrumat şi tehnica vidului pe căi noi.

După cum se ştie (R.M.F., nr. 1/954), gazele exercită o presiune asupra pereţilor vasului în care sînt închise, datorită ciocnirilor pe care le au moleculele în mişcarea lor dezordonată, cu pereţii vasului. Această presiune este dată de legea fundamentală a teoriei cinetice:

$$p = \frac{2}{3}\frac{N}{V}\cdot\frac{mc^2}{2}$$

unde N este numărul lui Avogadro, V este volumul unui mol de gaz, m masa moleculei şi c viteza medie patratică a moleculelor. Notînd cu $n_0 = \frac{N}{V}$ numărul de molecule din unitatea de volum şi cu $W = \frac{mc^2}{2}$ energia cinetică medie moleculară, această relaţie se poate scrie:

$$p = \frac{2}{3} n_0 \overline{W}$$

adică, presiunea unui gaz este proporţională cu numărul de molecule conţinute în unitatea de volum şi cu energia cinetică medie moleculară a gazului, deci, cu temperatura lui. Prin urmare, răcind gazul şi micşorînd numărul de molecule din fiecare cm³ de gaz, presiunea scade.

In mişcarea lor dezordonată, moleculele unui gaz se ciocnesc foarte des între ele, schimbîndu-şi necontenit viteza şi direcţia de mişcare. Intre două ciocniri consecutive moleculele se mişcă uniform rectiliniu pe o distanţă numită drum liber.

Dacă se calculează media drumului liber pentru toate moleculele gazului se obţine drumul liber mijlociu λ, care este dat de relaţia:

$$\lambda = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}\, r^2 n_0}\ \text{cm},$$

unde r este raza unei molecule. De ex. în aerul atmosferic la presiunea normală şi temperatura de 0°C, $\lambda = 0{,}6\cdot10^{-5}$ cm. Cînd presiunea gazului creşte λ scade, iar cînd presiunea gazului scade, λ creşte. Drumul liber mijlociu este în raport invers cu presiunea gazului. Dar fenomenele din gaze variază în funcţie de raportul dintre λ şi dimensiunile vasului în care se află gazul. Dacă $\lambda \ll d$ (d fiind diametrul vasului) o moleculă A se ciocneşte de multe ori cu altele, mişcîndu-se dela un perete la altul şi descrie un drum în zigzag foarte complicat (fig. 1).

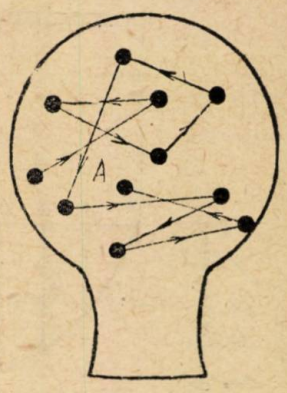


Fig. 1

Dacă însă, moleculele sînt rărite astfel încît $\lambda \gg d$, atunci o moleculă A parcurge distanţa dintre doi pereţi în linie dreaptă (fig. 2) şi se va ciocni de pereţi de cîteva ori înainte de a se ciocni cu o moleculă. In acest caz, ciocnirea de perete nu mai este elastică, molecula este oprită un moment pe perete, apoi este proiectată într-o direcţie oarecare. In general, acest fenomen se produce cînd rarefierea gazului depăşeşte presiunea de 10^{-3} torr (1 torr = 1 mm col Hg), $\lambda \cong 5$ cm.

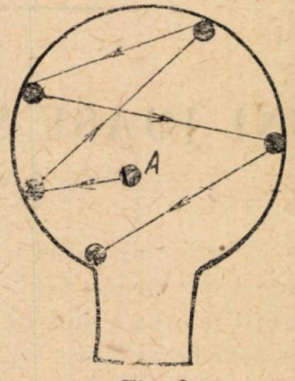


Fig. 2

Presiunile pînă la 10^{-3} torr se numesc vid uzual, iar sub 10^{-3} torr vid înalt sau înaintat. Pentru un vid înalt de 10^{-6} torr, $n_0 = 32\cdot10^{10}$ molecule pe cm³, iar λ=50 m. In acest vid aşa de înalt se mai găsesc încă 32 miliarde de molecule în fiecare cm³, iar o moleculă poate parcurge în medie, 50 m în linie dreaptă pînă să se ciocnească de o altă moleculă.

2. Există multe tipuri de pompe de vid: unele pot să rarefieze aerul direct dela presiunea atmo-

sferică pînă la presiunea limită pe care pot s-o atingă, pe cînd altele pot începe să funcţioneze numai de la un vid preliminar, făcut de altă pompă.

Noi vom descrie aici, numai tipurile de pompe care sînt deseori întrebuinţate în cercetările ştiinţifice, şi anume:

Trompa de apă şi *pompa rotativă cu palete*, pentru obţinerea vidului uzual, adică pînă la 10^{-3} torr.

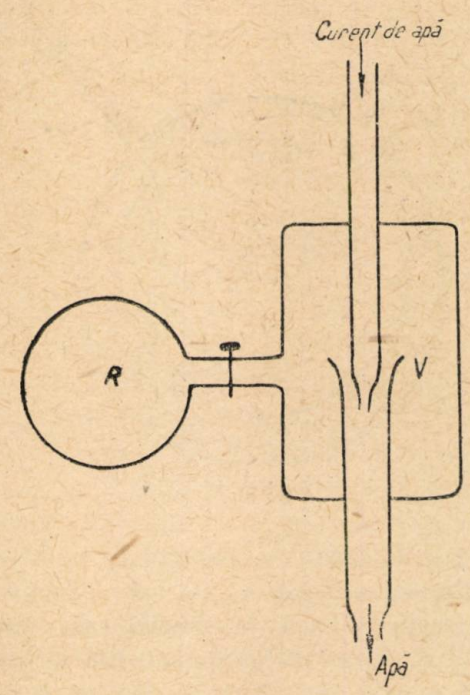


Fig. 3

Pompa rotativă moleculară şi *pompa de difuzie* cu vapori de mercur care dau vid molecular pînă la 10^{-7} torr, pentru care $\lambda \cong 500$ m.

3. *Pompe de vid uzual.* Ele servesc pentru a produce vidul prealabil, necesar la amorsarea unei pompe pentru vid înalt. Cea mai simplă dintre ele este trompa cu apă (fig. 3). Un curent rapid de apă curge printr-o ţeavă de sticlă subţiată la un capăt, de unde intră într-altă ţeavă mai largă. La gîtuitură viteza apei creşte şi antrenează cu ea aerul din jur, ceea ce produce rarefierea aerului închis în volumul V. In felul acesta, în recipientul R se face un vid care poate coborî pînă la 20—25 torr, care este presiunea vaporilor de apă saturanţi la temperatura camerei.

Pompa rotativă cu palete este o formă perfecţionată a cunoscutei maşini pneumatice (fig. 4). La mişcarea pistonului în sus din poziţia P_1 în P_2 se face vid în corpul de pompă C, din care cauză se deschide supapa S_1 şi gazul din recipientul R trece parţial, în C. La coborîrea pistonului din P_2 în P_1 se produce o comprimare a gazului în C; drept urmare se închide supapa S_1 şi deschide supapa S_2 prin care aerul iese afară. Repetînd operaţia, gazul din recipientul R se răreşte treptat, ajungîndu-se pînă la un vid de circa 10^{-2} torr, dacă se leagă 2 pompe în serie.

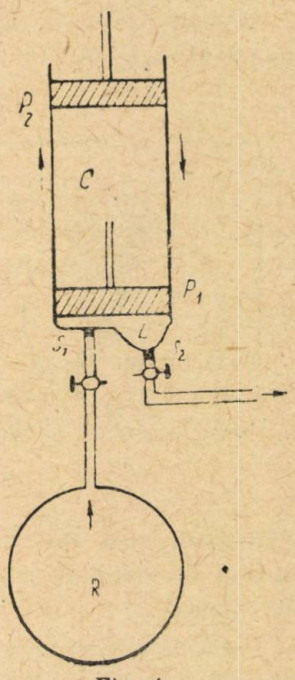


Fig. 4

Presiunea de golire ajunge la limită din cauza spaţiului vătămător reprezentat pe figură prin cavitatea L. Spaţiul vătămător este cauzat de aerul care nu este expluzat complet la coborîrea pistonului şi care se împrăştie în C la ridicarea pistonului. Înlocuind mişcarea rectilinie alternativă prin mişcarea de rotaţie continuă, tehnicienii au construit pompele rotative.

Intr-o cavitate cilindrică, avînd pereţii metalici, se roteşte excentric un cilindru plin A (fig. 5), bine păsuit cu peretele cavităţii cilindrice, de-a lungul generatoarei superioare, precum şi cu bazele cavităţii cilindrice. Paletele P_1 şi P_2 alunecă diametral în clindrul plin, fiind apăsate de un resort pe pereţii cavităţii pe care o împarte în două compartimente etanşe între ele, C_1 şi C_2. Cilindrul A este rotit de un electromotor, ceea ce face să crească compartimentul C, aspirînd gazul din R şi să scadă compartimentul C_2, evacuînd gazul prin supapa D. Ciclul de funcţionare se repetă

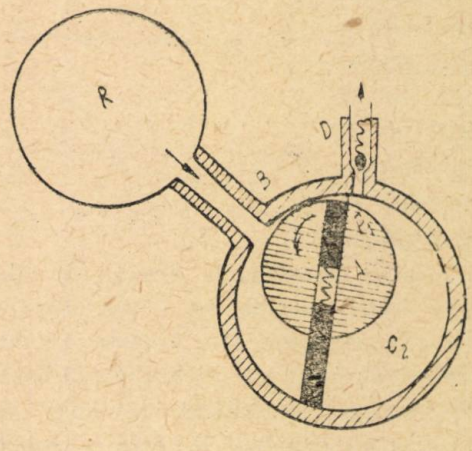


Fig. 5

la fiecare rotaţie a lui A. Intreaga pompă este cufundată în ulei, care acoperă supapa de evacuare şi asigură ungerea şi etanşeitatea. Vidul realizat

cu această pompă, în bune condiţii, poate fi de 10^{-3} torr. El poate atinge 10^{-5} torr dacă se leagă 2—3 pompe în serie (fig. 6). Viteza de evacuare este de 0,5—25 *l*/s. Şi la aceste pompe apare spaţiul

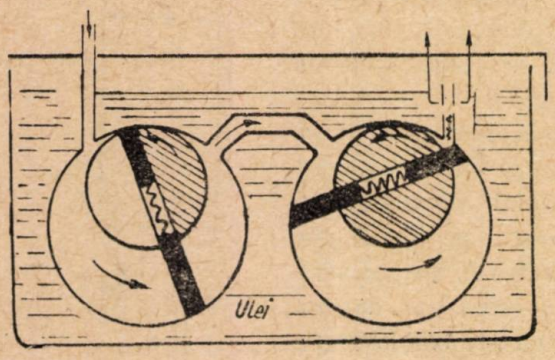


Fig. 6

vătămător, mai mic, e drept, dar care limitează gradul de rarefiere a aerului ce poate fi atins de pompă.

4. *Pompe de vid înalt.* Aceste pompe scot aerul sau alt gaz, dintr-un recipient, pe care-l împing în una din pompele precedente ce fac vidul preliminar. Vom descrie două tipuri de asemenea pompe. Pompa rotativă moleculară se bazează pe următorul principiu: fie 2 pereţi *A* şi *B* la o distanţă mai mică decît drumul liber mijlociu al moleculelor (fig. 7*a*). O moleculă *N*, ce loveşte peretele *B* în *I*, va fi reflectată în *S*. Dacă însă, peretele B_1 se mişcă faţă de A_1 (fig. 7*b*) cu o viteză comparabilă cu aceea a moleculei, atunci molecula din *G* reflectată în *Y*, va primi din partea peretelui B_1 în timpul ciocnirii, un surplus de viteză în direcţia de mişcare a peretelui, încît molecula va fi antrenată spre *L* de mişcarea peretelui B_1. Această antrenare a moleculelor, de un perete mobil, stă la baza funcţionării pompei moleculare rotative. Aceasta constă dintr-un cilindru *B*, care se roteşte excentric într-o cavitate cilindrică *A* (fig. 8), formînd cei 2 pereţi, unul fix şi unul mobil, ai unui canal foarte îngust *CAD* Cilindrul *B* face 6000—8000 rot/min. ceea ce înseamnă o viteză liniară a peretelui mobil de 300 — 500 m/s,

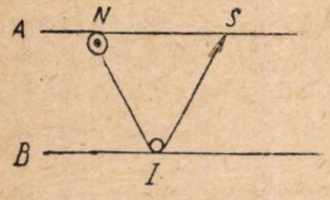


Fig. 7 *a*

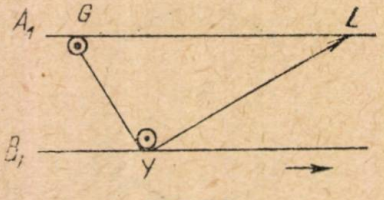


Fig. 7 *b*

avînd drept urmare antrenarea moleculelor în sensul mişcării. Moleculele ce ar avea mişcări opuse, adică în sensul *DAC*, sînt contrariate în mişcarea lor, din care cauză se naşte o creştere de presiune din spre *C* spre *D*. Raportul presiunilor ce se produc la extremităţile *C* şi *D*, depinde de viteza peretelui mobil al cilindrului. Dacă prin canalul *E* se face un vid prealabil sub 1 torr, în recipientul *R* legat la canalul *C* se va obţine un vid înalt de 10^{-6} — 10^{-7} torr.

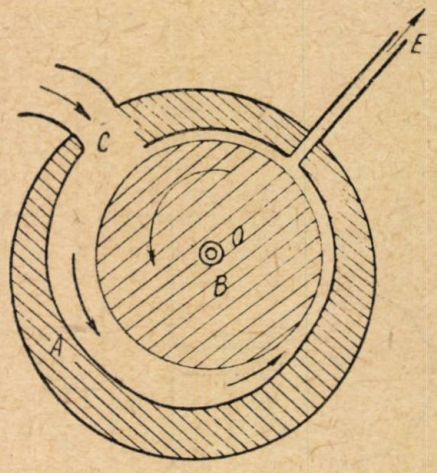


Fig. 8

Pompele de difuzie se bazează pe un alt principiu fizic dar prezintă marele avantaj de a avea o construcţie extrem de simplă, care poate fi realizată de orice sticlar dibaci. Ele nu au nici o piesă mobilă (fig. 9) Prin canalul *P* se face

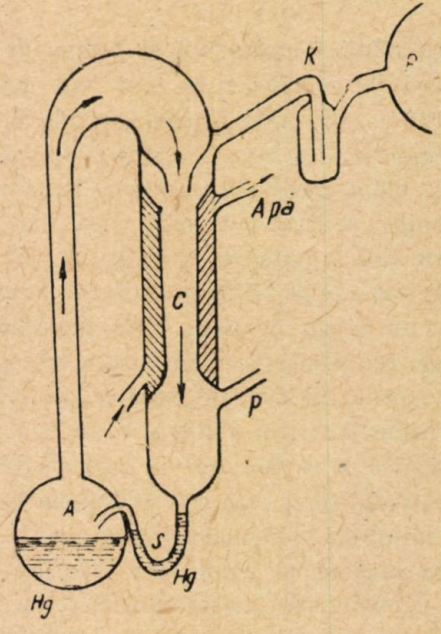


Fig. 9

legătura pompei cu vidul prealabil, iar prin canalul *R* se face legătura cu recipientul de vidat. Prin manşonul haşurat trece un curent de apă

rece. In interiorul pompei, deci şi a recipientului, se face mai întîi vidul preliminar de $10^{-2}-10^{-3}$ torr, pentru a putea fierbe mercurul din A la o temperatură coborîtă (sub temperatura de 350°, cînd mercurul s-ar oxida). Ajungînd în D, vaporii de mercur se amestecă cu gazul din recipientul de vidat. Dar moleculele gazului, mult mai uşoare decît vaporii de mercur, pătrund cu o viteză mare în vaporii de mercur, pătrund cu o pătrund în gaz cu o viteză mult mai mică. Din această difuzie asimetrică a gazului uşor şi rapid în vaporii de mercur grei şi lenţi, rezultă un amestec gazos antrenat continuu spre C; în canalul C, vaporii de mercur se condensează şi revin în A, iar aerul este antrenat de pompa de vid prealabil. Pentru a împiedica intrarea vaporilor de mercur în recipientul de vidat se pune între ele şi pompă o capcană K răcită cu CO_2 solid şi cu acetonă sau aer lichid. In felul acesta se poate ajunge repede, la o presiune de 10^{-7} torr. Dar vidul obţinut în acest fel este limitat la presiunea vaporilor de mercur la temperatura capcanei. Pentru a împinge mai departe această limită, se înlocuieşte mercurul cu un ulei special de petrol, avînd presiunea de vapori de 103 ori mai mică decît a mercurului. Este un ciclohexan cu masa moleculară circa 500, cu mare stabilitate chimică. In acest caz, capcana devine inutilă, iar presiunea scade dela 0,01 torr pînă la 10^{-7} torr.

Folosind diferiţi absorbanţi chimici, presiunea poate coborî pînă la 10^{-8} torr. Tehnica actuală a ajuns la viduri înalte de $10^{-12} - 10^{-13}$ torr.

5. *Măsurarea presiunilor joase.* Manometrele care servesc la măsurarea presiunilor joase, adică a gradului de rarefiere a gazelor, se numesc vacumetre. Ele sînt de multe feluri, bazate pe diferite fenomene fizice care variază cu presiunea cînd aceasta devine foarte slabă. Unele din ele funcţionează pe baza diferenţei de nivel produsă de o presiune oarecare în 2 tuburi comunicante, care conţin acelaşi lichid ce închide o presiune cunoscută. Din această categorie face parte vacumetrul *MacLeod*, cel mai întrebuinţat în laboratoare.

In alte manometre, presiunea de măsurat produce îndoirea unei lame elastice care separă două compartimente la presiuni diferite. Altele se bazează pe acele proprietăţi ale gazelor rarefiate care depind de numărul de molecule din unitatea de volum, adică de presiune.

Vacumetrul MacLeod se bazează pe legile compresiunii izoterme a gazelor şi are drept principiu de funcţionare izolarea unui volum cunoscut V din gazul a cărei presiune x voim să determinăm şi comprimarea lui pînă la volumul mic v, cînd presiunea creşte la valoarea mare p, măsurabilă direct. Se foloseşte cunoscuta relaţie a legii Boyle-Mariotte: $xV=pv$.

Aparatul se compune dintr-un capilar C, continuat printr-un balon (fig. 10), avînd o prelungire a rezervorului B cu mercur. O derivaţie

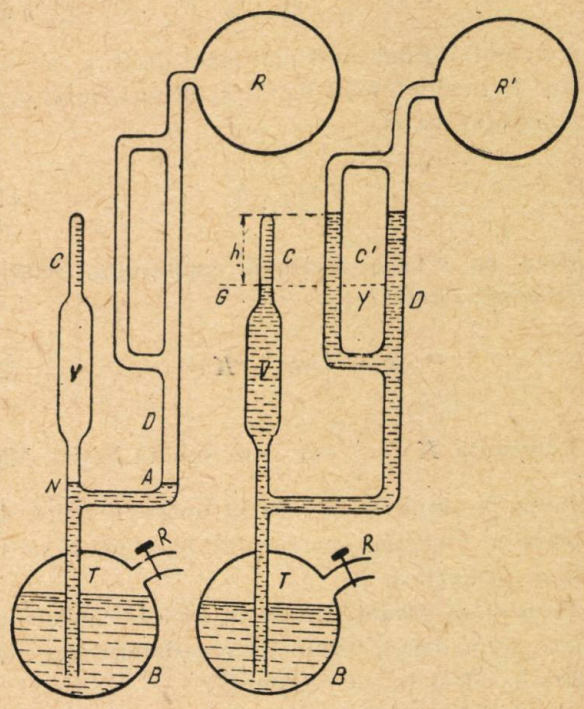


Fig. 10

D, are un braţ paralel cu capilarul şi de acelaşi diametru cu el, pentru a se evita corecţiile de capilaritate la citirea nivelului de mercur. Prin conducta D, vacumetrul este pus în legătură cu recipientul vidat, deci interiorul vacumetrului se află la aceiaşi presiune necunoscută x cu recipientul. Prin robinetul R lăsăm să intre încet aer de afară, ceea ce face să se ridice mercurul prin tubul T în sus. Cînd nivelul mercurului a ajuns în NA, se izolează recipientul de volumu V, în care se închide un volum V de gaz la presiunea necunoscută x. Aceasta este starea iniţială a operaţiei de măsurare a vidului. Mercurul continuă să urce comprimînd gazul în V, apoi în capilarul C, pînă cînd nivelul mercurului în capilarul paralel C' ajunge la nivelul extremităţii superioare a capilarului C; în acest moment închidem robinetul R. In acest moment final al citirii, gazul ce ocupa iniţial, volumul V la presiunea x, ocupă volumul v din capilar pe porţiunea h, la presiunea p. Legea *Boyle-Mariotte* aplicată, dă:

$$xV = pv$$

Considerăm neglijabilă variaţia lui x în recipient.

La nivelul GY presiunile în cele 2 capilare trebuie să fie egale, deci:

$$p = x + h$$

şi atunci:

$$xV = (x + h)\, v$$

de unde:

$$x = \frac{hv}{V - v}.$$

Volumul V fiind mult mai mare decît v, acesta poate fi neglijat faţă de V şi atunci presiunea de măsurat va fi

$$x = \frac{v}{V} h \qquad (1)$$

Notînd cu s aria secţiunii capilarului, relaţia precedentă devine:

$$x = \frac{s}{V} h^2 = \boldsymbol{K} h^2 \qquad (2)$$

Constanta $\boldsymbol{K} = \frac{s}{V}$ este determinată iniţial. Măsurarea presiunii se reduce la operaţia fizică de reglare a nivelului mercurului în capilar şi la citirea denivelării h.

Pe o scară gradată aflată în spatele capilarului C, se scriu direct presiunile corespunzătoare fiecărei h calculate cu relaţia (2).

Cu ajutorul acestui micromanometru se pot măsura exact, presiuni pînă la 10^{-6} torr, deoarece volumul V nu poate depăşi 500 cm³ iar diametrul capilarului nu poate coborî sub 0,5 mm. Acest vacumetru nu poate fi însă, folosit decît pentru gaze, care au temperatura critică deasupra temperaturii camerei. Altfel acesta s-ar condensa la comprimarea în capilar şi legea Boyle-Mariotte nu ar mai fi aplicabilă. El serveşte la etalonarea altor feluri de manometre. Pentru viduri mai înaintate, pînă la $10^{-9} - 10^{-10}$ torr, se foloseşte vacumetrul bazat pe variaţia rezistenţei cu temperatura.

Se ştie că rezistenţa electrică a unui fir depinde de temperatura la care se găseşte el, după relaţia:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t)$$

ρ fiind rezistivitatea firului, iar α un coeficient termic avînd în medie, valoare de $\frac{1}{250}$. Dacă însă, firul se află într-un recipient cu gaz la o presiune foarte mică, şi e străbătut de un curent constant, temperatura firului variază cu presiunea gazului. Această mică variaţie a temperaturii se manifestă printr-o variaţie corespunzătoare a rezistenţei, care se măsoară cu ajutorul unui galvanometru sensibil, montat într-o punte de rezistenţă. In esenţă, vacumetrul cu fir se compune dintr-un fir subţire F (fig. 11 *a*), de platin, aflat într-un vas menţinut într-o baie cu temperatura constantă. Prin R, vasul comunică cu recipientul a cărei presiune se măsoară, iar prin bornele A şi B se face legătura electrică cu firul F.

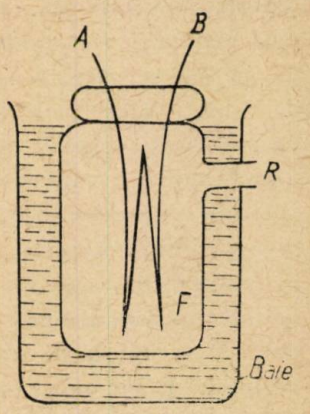


Fig. 11 *a*

Vacumetrul V este montat ca în fig. 11 *b*, într-o ramură a punţii şi variaţia lui de rezistenţă se măsoară prin comparaţie cu rezistenţa constantă a altui vacumetru identic V_{comp}, ambele fiind menţinute la aceiaşi temperatură. Curentul constant de încălzire se măsoară cu miliampermetrul MA iar variaţiile de rezistenţă se citesc prin variaţiile de intensităţi arătate de galvanometrul foarte sensibil G. Aparatul se etalonează în prealabil, cu ajutorul unui vacumetru MacLeod.

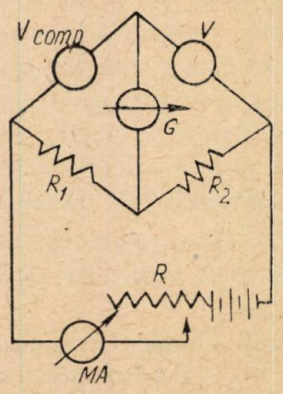


Fig. 11 *b*

Un vacumetru precis, fără piese mobile şi cu citire continuă este acela bazat pe fenomenul de ionizare. Fenomenul fizic pe care se bazează funcţionarea aparatului este ionizarea moleculelor de gaz rarefiat prin ciocnirea lor de către electroni, gradul de ionizare fiind proporţional cu presiunea.

Organul esenţial al dispozitivului este o lampă triodă (fig. 12) care comunică cu recipientul de vidat prin R. Grătarul G este pozitiv iar placa P este negativă. Curentul de placă I se citeşte la un galvanometru foarte sensibil E; dacă acesta este înlocuit printr-un electrometru, aparatul poate măsura viduri de peste 10^{-10} torr. Etalonarea lui se face tot cu vacumetrul MacLeod. Iată cum funcţionează el: filamentul incandescent F emite electroni accelerați de grătarul pozitiv G, dar respinşi de placa negativă P. În spaţiul de accelerare dintre F şi G electronii ciocnesc rarele molecule de gaz întîlnite şi le ionizează prin smulgerea unui electron. Ionii pozitivi formaţi din moleculele ce au pierdut electronii, sînt atraşi

de placa P şi galvanometrul E arată trecerea curentului I. Acest curent este proporţional cu numărul de ioni formaţi, deci, cu numărul de molecule pe cm^3 ionizate, deci cu presiunea din aparat.

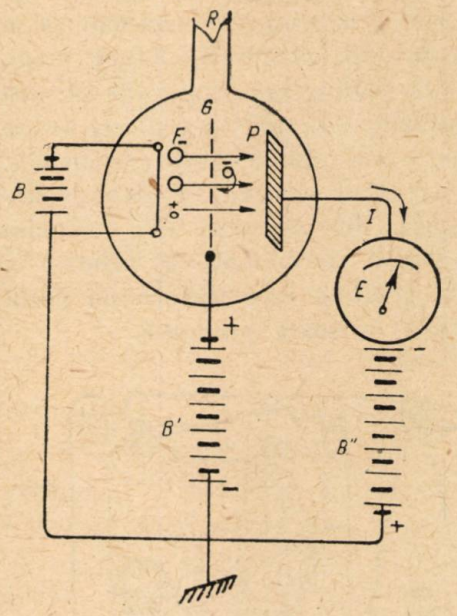


Fig. 12

Există şi alte feluri de vacumetre, dar cele descrise aici epuizează toată gama vidului ce se poate realiza practic.

6. *Ultrapresiuni.* Tehnica razelor X, a lămpilor de radio, a celulelor fotoelectrice, a iluminatului, a electroopticei, etc. necesită viduri extrem de înalte care se produc şi se măsoară cum am văzut mai sus. Dar nevoile tehnicii au pus şi problema presiunilor foarte mari, a ultrapresiunilor. In armele de foc se realizează presiuni mari de 400-4000 at, însă acestea sînt instantanee.

Industria chimică a amoniacului a impus realizarea unei presiuni de 1000 at (în 1920). Peste 7 ani s'a ajuns la presiunea enormă de 25000 at, iar mai tîrziu, chiar la 40000 at. Dar dacă tehnica vidului are de luptat cu dificultăţi legate de obţinerea unei etanşeităţi perfecte, tehnica ultrapresiunilor are de învins dificultăţi referitoare la rezistenţa pereţilor instalaţiilor.

Principiul de construcţie este neaşteptat de simplu şi se bazează pe legea lui Pascal, ca şi presa hidraulică. Dar pe cînd presa hidraulică lucrează împrăştiind pe o mare suprafaţă presiunea obţinută pe un piston mic, presa pentru ultrapresiuni este construită astfel încît presiunea iniţială de 1000 at., produsă pe un piston mare să fie concentrată pe un piston mic solidar cu cel dintîi. Instalaţia (fig. 13) cuprinde o pompă A ce dă 1000 kgf/cm^2 şi care alimentează un rezervor B ce conţine un lichid, menţinut mereu la presiunea de 1000 kgf/cm^2 Acest rezervor comunică printr-o supapă avînd un tub de diametru mic, cu un prim corp de pompă C în care se mişcă un piston destul de mare, D, prelungit prin al doilea piston mult mai subţire E. Acesta intră în camera principală de ultrapresiuni, adică într-un cilindru de acelaşi diametru, tăiat dintr-o masă de oţel special şi plin cu lichid. Este clar că în asemenea condiţii acest al doilea lichid primeşte din partea micului piston o presiune egală cu presiunea aplicată pistonului mare, multiplicată prin raportul care există între suprafeţele respective ale celor două pistoane.

Dacă raza pistonului mic este de 3 ori mai mică decît raza pistonului mare, presiunea finală este de 9000 kgf/cm^2.

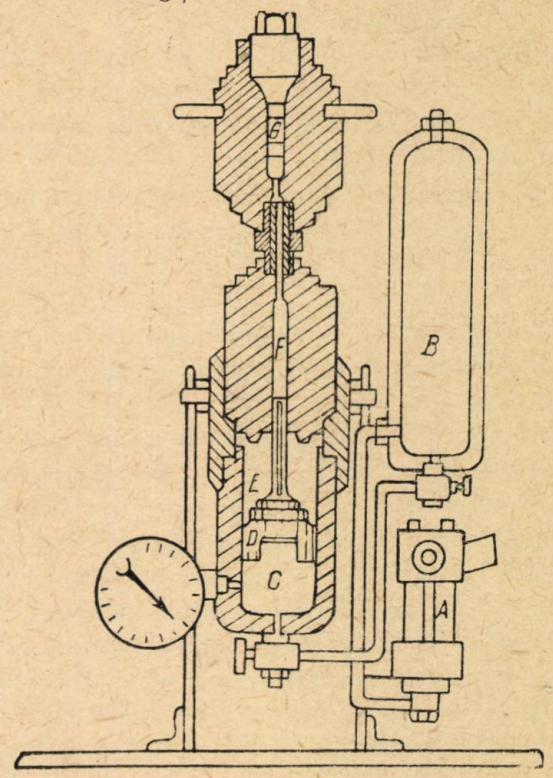


Fig. 13

Principiul unei asemenea prese este simplu, dar aplicarea lui este grea. Pentru construirea unei prese pentru ultrapresiuni este necesar oţel special.

O altă dificultate de învins este frecarea mare ce se produce între pistonul mic şi tubul în care alunecă. De asemenea, există frecare între legăturile diferitelor piese ale instalaţiei. Învingînd în bună parte aceste dificultăţi, tehnica a reuşit să realizeze presiuni de 40000 kgf/cm^2.

La ultrapresă se poate adapta o aşa numită cameră de experienţe situată deasupra micului piston; printr-un sistem de legătură potrivit scopului, se pot urmări, folosind o iluminare specială, diferitele fenomene ce se petrec în corpurile supuse

la ultrapresiuni. Această metodă de lucru este un fel de analiză spectrală.

La presiuni mari, ca şi la temperaturi joase, proprietăţile fizice şi chimice ale corpurilor se modifică.

Astfel, punctul de îngheţare al apei, care în mod normal coboară cînd creşte presiunea în limite obişnuite, se ridică la presiuni mari încît putem avea ghiaţă la 80°C sub o presiune de 1200 at.

Unele bacterii au rezistat la 17000 at.

La 15000 at, 1 litru de N_2 cîntăreşte 3 kg, dec densitatea lui se măreşte enorm.

Gazele capătă proprietăţi asemănătoare cu cele ale lichidelor, deoarece devin incompresibile la 12000 at. Explicaţia ar fi apropierea pînă la contact, a moleculelor.

O coloană de apă înaltă de 1 m poate fi redusă pînă la înălţimea de 65 cm sub presiune de 25000 at, dar aceasta echivalează cu presiunea unui ocean la 250 km adîncime.

Un lichid vîscos, comprimat la presiuni foarte înalte, capătă o rigiditate superioară celei a oţelului, iar metalele cele mai dure sînt secţionate de o lamă de ulei.

Ultrapresiunile vor permite sinteza mineralogică şi obţinerea pietrelor preţioase, de ex. rubinul, diamantul etc.

Intre 7000—10000 at, fosforul devine un corp foarte dens şi bun conducător de electricitate.

Ultrapresiunile au întrebuinţare imediată în chimie. Prin apropierea moleculelor, afinitatea chimică a corpurilor comprimate creşte, mai cu seamă acolo unde în reacţii intervin şi gaze.

S-a încercat de asemeni, acţiunea ultrapresiunilor asupra vieţii, bineînţeles fiind vorba de microbi, deoarece nici un organism mai complex nu poate rezista la ultrapresiuni. S-a constatat că bacteriile rezistă la 17000 at, iar la presiuni foarte mari seminţele unor plante au încolţit, germenii trăind chiar la 3000—4000 at, dînd aceleaşi culturi ca şi seminţele păstrate pentru comparaţie.

Bacilul Koch nu a rezistat la presiuni mari. Diastaza numită sucrază, presată la 10000 at timp de 30 minute pierde numai 35 % din activitatea sa, dar devine total inactivă la presiunea de 13500 kgf/cm².

Pentru a se măsura ultrapresiunile s-a recurs la o tijă mai subţire decît pistonul efectiv al ultrapresei. Această tijă se cufundă în mediul comprimat şi împinsă de acesta împinge la rîndul ei săgeata unei balanţe (fig. 14). E drept că tija este foarte subţire, ceea ce permite să se strecoare prin orificiu, însă alunecarea cere ca ea să fie menţinută constant în rotaţie de un mic motor, astfel ca să se împiedice griparea aparatului.

Presiunea din ultrapresă este comunicată unei balanţe care se echilibrează printr-o greutate. Această greutate înmulţită cu un coeficient al aparatului, măsoară presiunea.

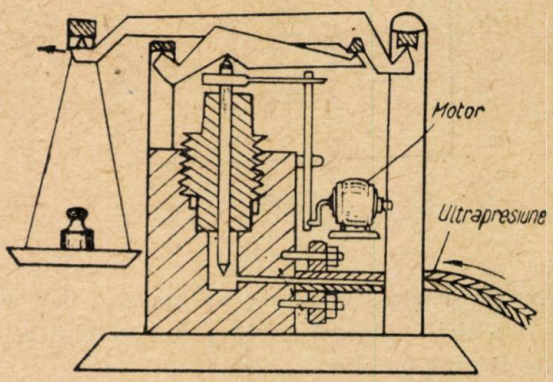


Fig. 14

Experienţele în domeniul ultrapresiunilor sînt încă la începutul lor. Un cercetător are un vast cîmp deschis curiozităţii, care poate duce la interesante şi folositoare rezultate. Un preţios motiv de încurajare a tehnicii ultrapresiunilor stă în faptul că pentru a comprima un gaz dela 1000 kg pînă la 5000 kg nu este necesar să se folosească o forţă de 5 ori mai mare, ci este suficient să se aplice compresoarelor o mărire de forţă de numai 24%.

Din punct de vedere ştiinţific, studiul ultrapresiunilor ne lasă să întrevedem noi orizonturi în ce priveşte constituţia materiei, ceea ce va permite pătrunderea mai adîncă în tainele naturii şi ne vor da noi posibilităţi de folosire a ei pentru viaţă.

CHESTIUNI DE EXAMEN*)

PROBLEME DATE LA EXAMENUL DE ADMITERE DIN AUGUST 1953 IN INSTITUTUL POLITEHNIC, IAŞI

1239. Fie $A'B'C'D'$ unul din paralelogramele înscrise în dreptunghiul $ABCD$ şi având laturile paralele cu diagonalele dreptunghiului.

Să se arate că perimetrul acestor paralelograme este acelaşi şi anume, egal cu dublul diagonalei dreptunghiului.

Să se arate că dacă $ABCD$ este un paralelogram oarecare cu lungimile diagonalelor d , d_2, atunci are loc relaţia:

$$\frac{l_1}{d_1} + \frac{l_2}{d_2} = 1$$

l_1, l_2 fiind lungimile laturilor paralelogramului înscris.

1240. Să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ ştiind $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$ şi că unghiul α este cuprins între 0° şi 45°.

1241. Să se determine p şi q aşa fel încît ecuaţiile

$$(5p - 52)\,x^2 + (4 - p)\,x + 4 = 0$$
$$(2q + 1)\,x^2 - 5qx + 20 = 0$$

să aibă aceleaşi rădăcini.

PROBLEME DATE LA EXAMENUL DE ADMITERE LA FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ DIN CLUJ, IN AUGUST 1953

Grupa I

1242. Fie x_1 şi x_2, rădăcinile ecuaţiei

$$x^2 + 2mx - m = 0$$

iar X_1 şi X_2, rădăcinile ecuaţiei

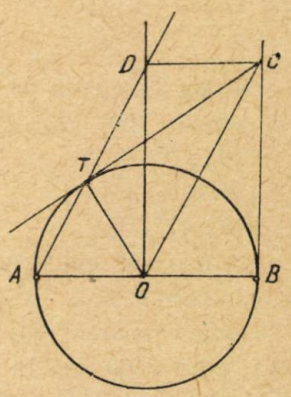
$$X^2 - (m + 1)\,X + m^2 = 0$$

în care m este un parametru.

Se întreabă pentru ce valori ale lui m, rădăcinile celor două ecuaţii verifică inegalitatea

$$(x_1 + x_2)\,X_1 X_2 < (X_1 + X_2)\,x_1 x_2$$

1243. Intr-un cerc oarecare, având centrul în O, se consideră un diametru al său, AB. Prin B se duce o tangentă la cerc pe care se ia un punct oarecare C. Din C se duce o a doua tangentă CT, punctul T fiind punctul de contact cu cercul. Notînd cu D punctul de intersecţie al dreptei TA cu perpendiculara ridicată în O pe diametrul AB, se cere să se arate că figura $OCDT$ este un trapez isoscel.



1244. Dacă numerele

$$\sin(B+C-A)\ ;\quad \sin(C+A-B)\ ;\quad \sin(A+B-C)$$

formează o progresie aritmetică, să se arate că şi numerele

$$\operatorname{tg} A\ ;\quad \operatorname{tg} B\ ;\quad \operatorname{tg} C;$$

formează de asemeni, o progresie aritmetică.

Grupa II

1245. Să se rezolve sistemul

$$x^2 y + xy^2 = 30$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}.$$

1246. Să se demonstreze că patratul construit pe tangenta comună a cercurilor descrise pe catetele unui triunghi dreptunghic ca diametru, este echivalent cu triunghiul dat.

1247. Să se rezolve ecuaţia trigonometrică

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\,\sin 2x.$$

PROBLEME REZOLVATE

Problema E. 291

Lungimea unui pod de fier este de 30 metri. Să se determine deplasarea maximă a capătului său liber dacă temperatura în timpul verii este de 50° iar în timpul iernii este de −30°C.

* * *

Soluţie. Lungimea la 0° a podului este de 30 m. Notăm cu t_1, temperatura din timpul verii, iar cu t_2, temperatura din timpul iernii.

$$l_{t_1} = l_0 + l_0\,\alpha t_1;$$
$$l_{t_2} = l_0 + l_0\,\alpha t_2,$$

deci

$$l_{t_1} - l_{t_2} = l_0\,\alpha\,(t_1 - t_2),$$

sau

$$l_{50} - l_{-30} = 30 \times 0{,}000012\,[50-(-30)] = 0{,}0288 \text{ m}.$$

Deci deplasarea maximă este de 0,0288 m. = = 28,8 mm.

*) La aceste probleme se primesc soluţii fiind socotite ca probleme propuse.

Problema E. 354

Din portul Constanța pleacă la aceiași oră, trei vapoare: unul face cursa dus și întors în 120 ore, altul în 126 ore și celălalt în 216 ore. Se întreabă după cîte ore vapoarele vor pleca din nou la aceiași oră?

Zaharescu Marius
elev, Tr. Severin

Soluție. Calculăm cel mai mic multiplu comun al numerelor 120, 126, 216.

$120 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3$

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

$216 = 2^3 \cdot 3^3$

Cel mai mic multiplu comun al numerelor este:

c.m.m.m.c. $= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 7560$.

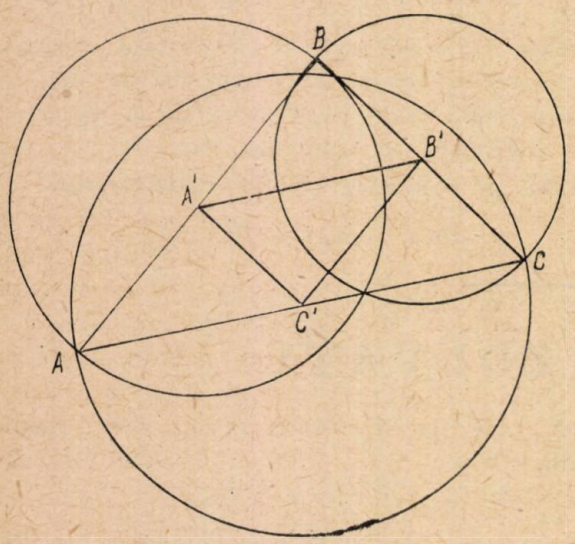
Deci, vapoarele vor pleca din nou la aceiași oră, după 7560 ore. In acest timp, primul va face 63 ture (dus și întors), al doilea 60 ture iar al treilea vapor, 35 ture dus și întors.

Problema E. 355

Cunoscînd mijloacele laturilor unui triunghi oarecare, să se găsească cu ajutorul compasului vîrfurile triunghiului.

* * *

Soluție: Unind mijloacele laturilor unui triunghi oarecare ABC s-a format triunghiul $A'B'C'$. Latura $A'B'$ opusă vîrfului C' unind mijloacele a două laturi în triunghiul cel mare va fi



egală cu jumătatea celei de-a treia al cărui mijloc este C'. Deci, $AC = 2A'B'$. La fel $AB = 2B'C'$ și $BC = 2A'C'$.

Construcția. Cu vîrful compasului în C' și raza egală cu $A'B'$ descriem un cerc care va întîlni cercurile cu vîrful în A' și B' de rază respectiv $B'C'$ și $A'C'$ în A și C care sunt două din vîrfurile triunghiului căutat. Vîrful al treilea al triunghiului se găsește la intersecția cercurilor de rază $B'C'$ și $A'C'$, adică în punctul B.

Verificare. Latura AC este diametru iar C' este centru în cercul de rază $A'B'$. Deci, rezultă că AC este egală cu $2A'B'$ adică, punctul C' este mijlocul laturii AC. La fel arătăm că B' adică punctul C' este mijlocul laturii AC. La fel arătăm că B' este mijlocul laturii BC și A' este mijlocul laturii AB.

Problema 668

Să se afle rezistența și f.e.m. introdusă într-un circuit indus format din 400 spire în serie, știind că un curent de 10 amperi străbate un solenoid, cu miezul de fier, lung de 1 m, care are 600 spire și că curentul se poate întrerupe într-un timp t=0,1 s secțiunea miezului de fier fiind de 20 cm², coeficientul de permeabilitate $\mu = 40$.

C. Oprea, București

Soluție. f.e.m. cerută este $E = N\dfrac{\Delta\Phi}{10^8 t}$, unde N este numărul spirelor circuitului indus, iar t timpul în care are loc variația de flux.

In cazul problemei fluxul variază dela zero maxwelli la

$$\Phi = \frac{0{,}4\,\pi\,\mu\,nIs}{l}\text{ max,. unde } \mu = 40,$$

$n = 600$ spire, $I = 10$ amperi, $s = 20$ cm², $l = 100$ cm,

Prin urmare,

$$\Delta\Phi = \Phi - 0 = 60.288 \text{ maxwelli}$$

$$E = 2{,}41 \text{ Volți.}$$

Rezistența solenoidului fiind mică, rezistența celor 400 spire poate fi calculată după formula,

$$R = \frac{E}{I} = 0{,}24 \text{ ohmi.}$$

Problema 856

Pe un același ax sînt centrate două discuri stroboscopice A și B, avînd respectiv 30 și 31 deschideri echidistante. Ce viteză de rotație are axul dacă privind prin A o coardă care vibrează, aceasta pare nemișcată, iar dacă este observată prin B pare că face 186 vibrații pe minut? La ce viteză de rotație a axului, aceeași coardă pare imobilă cînd este privită prin B și că ar face 180 vibrații pe minut dacă este privită prin A?

Ce frecvență are coarda?

N. Stănescu

Soluție. 1. Fie n_1 rot/minut viteza de rotație în primul caz. Vom avea $30 n_1 = \nu$ (frecvența reală a corzii) $= 31 n_1 - 186$
de unde

$$n_1 = 186 \text{ rot/min.}$$

2. Fie n rot/min viteza de rotație a axului în al doilea caz.
Vom avea:

$$30 n_2 + 180 = \nu = 31 n_2,$$

de unde

$$n_2 = 180 \text{ rot/min.}$$

Frecvența corzii este

$$\nu = 30 n_1 = 31 n_2 = 5580 \text{ vibrații/minut.} = 93 \text{ Hz.}$$

Problema 860

La ce temperatură viteza medie patratică a moleculelor de oxigen este egală cu a celor de azot la 100° C?

Care este energia internă a moleculelor ce se află în 5 litri de H_2 ținut la presiunea de 3 Kg/cm².?

* * *

Soluție.

1. $$U_N^2 = \frac{3RT}{M} = \frac{3R \cdot 373}{38}$$

$$U_0^2 = \frac{3R \cdot T_1}{32}.$$

Vom avea $U_N^2 = U_0^2$ pentru

$$T_1 = \frac{8 \cdot 373}{7} = 426° K = 153° \text{ C}$$

2. $$U = \frac{3}{2} npvKT \text{ ergi}$$

unde n este numărul lui Loschmidt: $2{,}7.10^{19}$ mol/cm³ la 0° C = 273° K, p presiunea gazului (kgf/cm²) v volumul gazului (cm³), k constanta lui Boltzmann, iar T temperatura absolută, 273° K.
Obținem:

$$U = \frac{1{,}5 \cdot 2{,}7 \cdot 10^{19} \cdot 3 \cdot 5000 \cdot 0{,}14 \cdot 10^{-16} \cdot 273}{10^7 \cdot 9{,}80} \text{ kgm.}$$

$$U = 236{,}9 \text{ kgm}$$

Problema 861

Intr-un cerc $O(R)$ ducem diametrul AC și coardele AB și AD, respectiv 1_3 (latura triunghiului echilateral) și 1_4 (latura patratului înscris în cerc) Dreptele AB și DC se taie în M, iar AD și BC în N. Să se calculeze laturile triunghiului OMN în cazul cînd AB și AD sînt de o parte și de alta a diametrului AC și în cazul cînd sînt în aceeași parte.

N. C. Ciomu

Soluție. In ambele cazuri M este ortocentrul triunghiului ANC, AB și CD fiind înălțimi în acest triunghi. In primul caz avem

$$\sphericalangle NAC = 45°, \quad \sphericalangle NCA = 120°, \quad \sphericalangle ANC = 15°$$

$$AN = \frac{2R \sin 60°}{\sin 45°}; \quad NC = \frac{2R \sin 45°}{\sin 15°}$$

$$r \text{ (raza cercului } OMN) = \frac{R}{\sin 15°}$$

$$\overline{MN} = 2r \cos 15° = 2R \operatorname{ctg} 15°$$

$$MN = 2(2 + \sqrt{3})\, R$$

$$ON^2 = \frac{2(AN^2 + NC^2) - AC^2}{4}$$

$$\overline{ON} = \sqrt{19 + 10\sqrt{3}} \cdot R$$

$$\overline{OM}^2 = \frac{1}{2} AC^2 - ON^2 + MN^2$$

$$\overline{OM} = \sqrt{11 + 6\sqrt{3}} \cdot R$$

In al doliea caz

$$\sphericalangle NAC = 45°, \quad \sphericalangle NCA = 60°, \quad \sphericalangle ANC = 75°$$

$$AN = \frac{2R \sin 60°}{\sin 75°}; \quad NC = \frac{2R \sin 45°}{\sin 75°}$$

$$r = \frac{R}{\sin 75°}$$

$$\overline{MN} = 2r \cos 75° = 2R \operatorname{ctg} 75°$$

$$\overline{MN} = 2(2 - \sqrt{3})\, R$$

$$\overline{ON} = \sqrt{19 - 10\sqrt{3}}\, R$$

$$\overline{OM} = \sqrt{11 - 6\sqrt{3}}\, R$$

Problema 877

Intr-un cilindru închis cu un piston există 0,5 Kg aer la o presiune efectivă de 2,065 Kg/cm² și la o temperatură de 5°C. Se furnizează acestei cantități de aer o cantitate de căldură de 60 Kcal. și se menține tot timpul aceeași presiune. Care este temperatura finală a aerului și lucrul mecanic util produs, cunoscînd căldura specifică a aerului sub presiunea constantă $C_p = 0{,}24$ Kcal/kg și constanta sa $R = 29{,}27$.

C. Dragomir
elev, Pitești

Soluție. Vom avea

$$Q = G\, C_p\, (t_2 - t_0)$$

în care

$$Q = 60 \text{ kcal}, \quad G = 0{,}5 \text{ kg}, \quad C_p = 0{,}24 \text{ kcal/kg}$$

$$t_1 = 5°\text{C}, \text{ de unde } t_2 = 505°\text{C}.$$

Pentru energia mecanică produsă de 1 kg. de gaz avem relația:

$$\frac{Q}{G} = C_v (t_2 - t_1) + \frac{W_1}{427},$$

în care

$$C_v = C_p - \frac{R}{427} = 0{,}17 \text{ kcal/kg grad.}$$

Energia mecanică totală produsă de 1 kg aer este deci

$$W_1 = 35 \times 427 = 14945 \text{ kgm.}$$

In cilindru fiind numai 0,5 kg aer, energia mecanică produsă de această cantitate de aer este

$$W = 0{,}5 \times W_1 = 7472{,}5 \text{ kgm.}$$

Din această energie numai o parte este utilă și dată de relația

$$\frac{W}{W_u} = \frac{p}{p - p_a}$$

în care

$$p = 2{,}066 \text{ kg/cm}^2 \quad , \quad p_a = 1{,}033 \text{ kg/cm}^2$$

de unde

$$W_u = 3736{,}25 \text{ kgm} = 36615{,}25 \text{ juli}$$

Problema 882

Ce cantitate de cărbuni este necesară pentru a transforma integral în vapori un kg de ghiață cu temperatura de −4°C știind că pierderile de căldură sînt 20%, iar căldura specifică și de topire a ghieții sînt respectiv 0,5 cal g. și 80 cal g., căldura de vaporizare a apei 539 cal/g. și puterea calorică a cărbunilor 7000 Kcal/Kg. In cît timp se transformă în vapori aceeași cantitate de ghiață cu aceeași temperatură inițială dacă se folosește un fierbător electric cu rezistența de 24 ohmi pus la o priză de 110 volți, randamentul fiind de 0,9.

S. M. Fotă
elev, Giurgiu

Soluție. Vom avea

$$0{,}8 \text{ m} \times 7000 = 1\,(4 \times 0{,}5 + 80 + 100 + 539);$$

$$0{,}8 \text{ m} \times 7000 = 721;$$

$$m = 0{,}12875 \text{ kg} = 128{,}75 \text{ g. Cărbune.}$$

$$721000 = 0{,}9 \times 0{,}24 \times \frac{110^2}{24} t;$$

$$t = 6620 \text{ sec} = 1\text{h. } 50 \text{ m. } 20 \text{ s.}$$

Problema 884

Un circuit este format dintr-o rezistență $R = 250$ ohmi, o self-inductanță $L = 1$ henry și o capacitate $C = 10$ microfarazi. Să se calculeze curentul total cînd cele trei elemente sînt legate în derivație și apoi în cazul cînd elementele sînt legate în serie, știind că tensiunea alternativă U este de 100 volți și pulsația curentului $\omega = 500$ este aceeași în ambele cazuri.

E. D. Tătaru
elev, Aiud

Soluție. Pentru legătura în paralel avem:

$$I = U\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{L\omega} + C\omega\right);$$

$$I = 100\left(\frac{1}{250} + \frac{1}{500} + \frac{5}{1\,000}\right);$$

$$I = 1{,}1 \text{ amperi.}$$

Pentru legătura în serie avem:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}};$$

$$I = \frac{100}{\sqrt{250^2 + (500 - 200)^2}};$$

$$I = 0{,}256 \text{ amperi.}$$

Problema 885

Un solenoid are 240 spire pe o lungime de 36 cm. Care este intensitatea cîmpului din interior, cînd trece prin solenoid cu curent de 15 amperi? Ce valoarea are fluxul care străbate un cerc cu suprafața de 4 cm² așezat în interiorul solenoidului perpendicular pe liniile de forță?

E. Gr. Bălescu
elev, Târgoviște

Soluție. Avem:

$$H = \frac{0{,}4\,\pi n I}{l} = \frac{0{,}4\,\pi \times 240 \times 15}{36} \text{ Oe.}$$

$$H = 125{,}66 \text{ Oersted}$$

$$\Phi = \mu H S = 1 \times 125{,}66 \times 4 \text{ Maxwell}$$

$$\Phi = 502{,}65 \text{ Maxwell.}$$

ERATĂ. La problema propusă 1143 în loc de $\frac{\pi}{2}$ se va scrie $\frac{\pi}{4}$.

PROBLEME PROPUSE[1)]

1214. Considerăm un strat de zăpadă gros de 10 cm la 0°C. Cîtă căldură solară va trebui să primească m^2 de suprafaţă pentru a răspîndi în aer vaporii de apă a căror temperatură să fie de 12°C. Se presupune că densitatea zăpezii este 0,077, iar căldura de vaporizare a apei la 12°C este 600. Cîte kg. de cărbune va trebui să ardă pentru a se produce acelaşi efect, dacă 1 gram de cărbune degajă prin ardere 8000 calorii gram?

Virgil Atanasiu

1215. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare. Notăm cu M şi N picioarele perpendicularelor coborîte din D şi C pe dreptele paralele Δ_1 şi Δ_2 ce trec respectiv prin punctele A şi B.

Să se găsească locul geometric al mijlocului P al segmentului MN. Se va considera şi cazul cînd dreptele Δ_1 şi Δ_2 sunt perpendiculare între ele.

Mihail I. Popescu
student

1216. Fie $ABCD$ un patrulater cu diagonalele AC şi BD perpendiculare în O, iar M, N, P, Q, picioarele perpendicularelor duse din O respectiv pe AB, BC, CD, DA. Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil. Să se cerceteze şi reciproca.

* * *

1217. O eprubetă largă se cufundă cu capătul deschis în apă. Dacă se acoperă fundul eprubetei cu vată umezită în eter nivelul apei din eprubetă se ridică în mod vizibil. Să se explice acest fenomen. Să se dea exemple de sublimare şi exemple de supra topire.

* * *

1218. Dacă produsul a două laturi opuse ale unui patrulater este egal cu produsul celorlalte două laturi, atunci bisectoarele interioare (exterioare) a două unghiuri se taie pe una din diagonale; iar bisectoarele celorlalte două unghiuri se taie pe cealaltă diagonală. Să se arate că şi reciproca este adevărată.

Corneliu Georgescu
Craiova

1219. Să se explice direcţia vînturilor alizee. Dece în timpul gerurilor foarte mari patinele nu alunecă pe gheaţă tot aşa de uşor ca atunci cînd frigul nu este prea mare?

* * *

1220. Să se găsească locul geometric al punctelor M astfel ca distanţa între proiecţiile acestor puncte pe două drepte concurente date, să fie constantă.

* * *

1221. Se împarte arcul AB al unui cerc (O) în patru părţi egale $BC = CD = DE = EA$.

Să se arate că:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} - \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = 1.$$

Cristea I. Ion
elev, Constanţa

1222. Să se arate că ecuaţiile

$$y = \frac{ax + 1}{x - b} \quad \text{şi} \quad x = \frac{by + 1}{y - a}$$

reprezintă aceiaşi curbă. Să se reprezinte grafic pentru $a = 1$ şi $b = 2$.

Să se intersecteze cu dreapta $x - 3y + 2 = 0$.

C. Ionescu-Ţiu

1223. Extremităţile ipotenuzei BC a unui triunghi dreptunghic ABC alunecă pe laturile unui unghi drept xoy. Să se găsească locul geometric al mijlocului medianei din A, în cazul cînd A şi O sînt de o parte sau de cealaltă a ipotenuzei.

* * *

1224. Pe un cerc se iau trei puncte: A variabil iar B şi C fixe. Fie H intersecţia înălţimilor BB_1 şi CC_1 în triunghiul ABC. Să se demonstreze că segmentele B_1C_1 şi AH sînt constante ca mărime.

* * *

1225. Dacă S este aria totală a unui tetraedru şi d_1, d_2, d_3, d_4 diametrii cercurilor înscrise feţelor lui, să se stabilească neegalitatea:

$$27\, d_1 d_2 d_3 d_4 \leqslant S^2$$

Simon St. Petre

1226. Fie un triunghi oarecare ABC. Înălţimile AA_1, BB_1, CC_1 întîlnesc cercul circumscris triunghiului în punctele A_2, şi B_2. Dreptele AC şi BA_2 se întîlnesc în N, iar perpendiculara în B pe BC întîlneşte dreapta AC în M. Paralela din N la BM întîlneşte dreapta BB_2 în P. Să se arate că:

$$\frac{2\,\overline{BP} \cdot \overline{CN}}{\overline{PN} \cdot \overline{BC}} - \frac{\overline{PN}}{\overline{MB}} = 1$$

[1)] Se primesc soluţii la aceste probleme pînă la 1 Septembrie 1954.

cînd triunghiul ABC este ascuțitunghi, și

$$\frac{\overline{BP}\cdot\overline{MB}}{\overline{BC}\cdot\overline{CN}}+\frac{2\,\overline{MB}}{\overline{PN}}=1$$

dacă unghiul A este obtus.

Virgil I. Arsintescu
elev, Iași

1227. Să se rezolve sistemul

$$\sin x+\sin y=a$$
$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{tg}\frac{y}{2}=b.$$

* * *

1228. Se dau în spațiu un plan P și două puncte A și B. Să se găsească locul geometric al punctelor din planul P, astfel ca dreptele care le unesc cu cele două puncte date A și B să fie egal înclinate pe plan.

* * *

1229. Să se rezolve ecuația

$$\arcsin ax+\arcsin bx+\arcsin cx=\pi$$

unde $a\geqslant b\geqslant c$

H. Hamzin
(Sterlitamak)

1230. Cum se poate construi o dreaptă care trece printr-un punct dat A și prin punctul de intersecție a două drepte date D și D' care nu se întîlnesc în cadrul hîrtiei pe care se face desenul? Se pot întrebuința mai multe procedee pentru a rezolva această problemă.

* * *

1231. Dece coșurile sobelor trag mai bine cînd bate vîntul?

Intr-un bazin de probă închis, se scufundă un vaporaș. Ce se întîmplă cu nivelul apei din bazin? Dece pocnește biciul?

* * *

1232. Dece este mai intensă lumina proiectată direct pe un ecran decît dacă este proiectată prin reflexie?

Ochiul funcționează ca o lentilă convergentă, deci, imaginile pe retină sînt răsturnate. Dece atunci, nu vedem răsturnate obiectele pe care le privim?

* * *

1233. Notăm cu a și b laturile, iar cu d_1 și d_2 diagonalele unui paralelogram, φ unghiul format de diagonale, iar θ unghiul format de laturi. Să se stabilească relația

$$\left|\frac{a^2-b^2}{d_1^2-d_2^2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\varphi}\right|$$

C. Ionescu-Țiu

1234. Prin două stele de coordonate date (α și D), (α' și D') se duce un cerc mare. Se cere ascensiunea dreaptă A a intersecțiilor acestui cerc cu Ecuatorul, precum și unghiul de înclinare i al acestui cerc cu planul ecuatorului.

Aplicație: $\alpha=19^h\,53^m\,17^s$; $D=-13°\,24'\,37''$

$\alpha'=5^h\,28^m\,16^s$; $D'=+11°\,59'\,41''$

Florin Torjescu
elev, Ploești

1235. Să se resolve sistemul

$$x^3-y^2z=a$$
$$y^3-z^2x=b$$
$$z^3-x^2y=c$$

I. Iavorski (Moscova)

1236. Să se demonstreze că un număr N_{10} este divizibil cu 37 dacă împărțindu-l în grupe de $3n$ cifre dela dreapta la stînga, suma numerelor astfel formate, se divide cu 37. Să se aplice această regulă numărului

$$N=135729486054983276140321 7982$$

Marius V. Iosifescu
elev, Pitești

1237. Două cercuri (O_1) și (O_2) sînt secante în A și B. Tangenta în A la cercul (O_1) taie cercul (O_2) în C; tangenta dusă din B la cercul (O_2) taie cercul (O_1) în D. Fie P, intersecția tangentelor și Q, intersecția dreptelor AB și CD.

a) Să se arate că $\overline{AQ}\,(\overline{PA}^2+\overline{PC}^2)=\overline{BQ}\,(\overline{PB}^2+\overline{PD}^2)$ iar în cazul cînd unghiul APB este drept, avem: $\overline{AQ}^3\cdot\overline{PC}^2=\overline{BQ}^3\cdot\overline{PD}^2$.

b) Să se construiască grafic triunghiul ABP, cunoscînd razele celor două cercuri și unghiul APB.

Tiberiu Weszely
elev, Tg. Mureș

1238. Laturile unui unghiu drept care se rotește în jurul vîrfului său fix A, întîlnesc două drepte perpendiculare, în M și N.

a) Să se arate că triunghiurile AMN rămîn asemenea între ele.

b) Care este locul geometric al unui punct depe MN care împarte acest segment într-un raport dat, locul geometric al centrului de greutate al triunghiului AMN și locul geometric al centrului cercului înscris în acest triunghi.

I. Loziciu
profesor, Caransebeș

EXERCIȚII PROPUSE PENTRU ȘCOALA DE 7 ANI *)

E: 457. In trei sertare sînt în total 107 caiete. In sertarul I sînt 8 caiete mai mult decît în II și cu 10 caiete mai puțin decît în III. Cîte caiete sînt în fiecare sertar? Se va schița judecata rezolvării.

* * *

E: 458. Să se găsească numărul x știind că:

$$[(x : 32 - 20) : 15 \cdot 7000 - 192000] : 40 = 800$$

Să se explice modul de lucru.

* * *

E: 459. Se cere să se justifice găsirea cifrelor care au fost înlocuite cu steluțe în următoarea înmulțire:

$$\begin{array}{r} \star\ 8\ \star \\ \star\ 8 \\ \hline 4\ \star\ \star\ \star \\ \star\ \star\ \star \\ \hline \star\ \star\ \star\ \star\ 0 \end{array}$$

* * *

E: 460. Să se găsească valoarea expresiei

$$\left\{\left[\left(\frac{17}{24}+\frac{9}{40}\right)-\left(\frac{11}{48}+\frac{31}{80}\right)\right] : 3\frac{4}{5}\right\} \cdot 1\frac{5}{7}.$$

* * *

E: 461. Cînd fierbe mai repede un aliment, într-un vas deschis sau acoperit, și dece? Dar apa? Să se explice cum influențează sarea de bucătărie pusă în apă înainte de fierbere.

Alimentele fierb mai bine pe vîrful muntelui decît la șes?

* * *

E: 462. Să se arate că:

$$(2a - b - c)^2 + (2b - a - c)^2 + (2c - a - b)^2 = 3\left[(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2\right]$$ și

$$(1+2x)\left[1 + 16\,(1 + x)\right] = 15\left[(x^2 - (1 + x)^2\right] + 16\left[x^3 + (1 + y)^3\right].$$

C. Ionescu-Țiu

E: 463. Să se arate că:

$$(x-y)^3 + (x+z)^3 + 3\,(x - y)\,(x+z)\,(2x-y+z) = x^3 + (x - y + z)^3 + 3x\,(x-y+z)\,(2x-y+z) = (2x + z)^3 - y^3 + 3y\,(2x + z)\,(y - 2x - z).$$

H. Dăscălescu

E: 464 Fie un trapez $ABCD$ ale cărui diagonale AC și BD se taie în O, bazele fiind AB și CD. Paralelele la diagonale duse prin B și C se taie în M, iar paralelele la diagonale duse prin A și D se taie în N. Să se demonstreze că MN este paralelă cu bazele trapezului, iar segmentul de pe MN cuprins între diagonale este cît diferența bazelor.

Marius Zaharescu,
elev, Tr. Severin

E: 465. Fie M un punct în interiorul unui triunghi oarecare ABC, iar M_1, M_2, M_3 simetricele lui M față de mijloacele laturilor BC, , CA, AB. Să se arate că perimetrul exagonului $M_1BM_3AM_2C$ este de două ori suma distanțelor dela punctul M la vîrfurile triunghiului ABC, iar aria este de două ori aria triunghiului ABC.

Zidăroiu Corneliu,
elev, București

E: 466. Să se rezolve sistemul de ecuații

$$x + y = 1000$$

$$x + \frac{x}{4} + y - \frac{z}{5} = \frac{7}{6}\left(x + \frac{x}{4} + z\right)$$

$$z = y + \frac{z}{5}.$$

Se va folosi o cale de rezolvare cît mai simplă, apoi se va face verificarea.

C. I. Ț.

E: 467. Dece nu se folosesc barometre cu apă sau cu alcool?

Este justă expresia: «Vopseaua s-a uscat»? (este vorba de vopsea de ulei).

Dece vara la soare un metal este mai cald decît pămîntul?

* * *

E: 468. Să se dea un exemplu care să confirme evaporarea ghieții.

Oare va fierbe apa dintr-o oală ce plutește într-un vas în care fierbe apă?

* * *

E: 469. Dece se înroșește spirala dela un reșou electric sau dela un bec electric la trecerea curentului și nu se înroșește și firul conductor prin care vine curentul dela sursa de curent electric?

Care este rostul siguranțelor electrice?

* * *

E: 470. Din vîrfurile B și C ale unui triunghi oarecare ABC ducem paralele la înălțimea AD pe care dreptele AC și AB o taie în M și N. Să se arate că $MB \cdot DC = NC \cdot BD$.

Radu Stroe
elev, Ploești

*) *Repartizarea pe clase este astfel:* Clasa V-a (E: 457, 458, 459, 460); Clasa VI-a (E: 461, 462, 463, 464, 465, 467, 468); Clasa VII-a (E: 466, 469, 470). Elevii sînt însă sfătuiți să încerce rezolvarea și a problemelor care nu aparțin clasei din care fac parte.

CĂTRE CITITORII REVISTEI MATEMATICE ȘI FIZICE

Pentru ca revista, care apare începînd din luna mai 1954 sub numele de Gazeta Matematică şi Fizică seria *B* pentru tineret, să devină cît mai folositoare, corespondenţii sînt rugaţi să trimită redacţiei odată cu problemele rezolvate, pe cîte o foaie separată, unele date şi aprecieri:

1. Ce anume chestiuni publicate în R.M.F. v-au interesat şi eventual cu o scurtă explicaţie.

2. Indicaţi articolele clare, interesante şi care v-au ajutat, precum şi pe acelea cu lipsuri.

3. Arătaţi problemele propuse sau rezolvate socotite de dv. ca model şi pe acelea cu lipsuri.

4. Dacă rubricile ce constituie R.M.F. cu extinderea pe care o au sînt de ajuns şi ce anume complectări sau suprimări se pot face.

5. Ce anume articole, note, probleme, propuneţi spre publicare în Gazeta Matematică şi Fizică seria *B* pentru tineret ?

6. Ce propuneţi pentru antrenarea colaboratorilor şi pentru creşterea numărului de corespondenţi?

7. Faceţi observaţii cu privire la condiţiile tehnice în care apare revista şi ce îmbunătăţiri propuneţi.

8. Daţi date precise cînd au apărut ultimele numere din R.M.F. în localitatea dv., dacă sosesc în număr suficient sau de cîte exemplare ar mai fi nevoie.

9. Alte observaţii şi sugestii.

10. Scrieţi clar numele, pronumele, profesiunea, adresa dv. şi expediaţi-le pe adresa:

GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ, seria *B* pentru tineret, str. Dionisie Lupu nr. 40, Bucureşti.

POŞTA REDACŢIEI

Dogaru Ştefan, Focşani. Problemele rezolvate pe care le-aţi trimis vor fi anunţate în numărul următor al G.M.F. seria *B* pentru tineret.

Hodiş Grigore, Zalău. Despre activitatea cercurilor de matematici şi despre desfăşurarea « Olimpiadei matematice 1954 » ne puteţi trimite date concrete şi propuneri. Problemele pe care le propun corespondenţii nu pot fi publicate dacă sînt cunoscute sau prea simple.

Boşorogan Iuliu, Deva. Soluţiile problemelor ce aţi trimis se vor anunţa în numerele următoare. In rezolvarea unei probleme, în afară de formule şi calcule, să scrieţi în text şi modul de lucru, succesiunea operaţiilor şi concluziile obţinute.

Cristea I. Ion, Constanţa. La fiecare trimitere de probleme, dv. ne cereţi răspuns de primirea lor. Puteţi constata dacă problemele au fost primite la redacţie, urmărind « Rubrica Rezolvitorilor » din numerele următoare ale G.M.F. unde se anunţă soluţiile bune. — Problemele propuse de dv. nu corespund toate pentru « Gazeta Matematică şi Fizică », seria *B* pentru tineret, unele fiind cunoscute.

Berbente Cornel, Tîrgovişte. — Vom publica chestiuni de examen date la Institutul Politehnic şi dela alte institute. Problemele pe care le-aţi propus nu corespund pentru G.M.F.

Constantin I. Georgescu, învăţător, comuna Alunu, regiunea Piteşti. — Am luat act de scrisoarea dv. referitoare la neprimirea revistelor şi am intervenit la Centrul de Difuzare a Presei pentru rezolvarea reclamaţiei făcute. — Privitor la propunerea de reeditări de cărţi, vă putem anunţa că vor apare în « Biblioteca Societăţii de Ştiinţe Matematice şi Fizice », « Culegerea de probleme de geometrie » de Gh. Ţiţeica şi « Maxime şi minime geometrice », de Ion Ionescu.

Dobre C., Ciulniţa. — Am primit scrisoarea dv. în care faceţi propuneri pentru un alt mod de efectuare a operaţiei de înmulţire a numerelor. Procedeul întrebuinţat de dv. cere spaţiu şi timp mai mare decît cel folosit prin aplicarea metodelor date în manualele şcolare.

Croitoru Adolf, student, Iaşi. — S-a primit nota dv. privind rezolvarea ecuaţiilor nedeterminate.

Stănuleţ Mihai, Turnu-Severin.— Intîrzierea în apariţia R.M.F. nr. 1 se datoreşte şi greutăţilor provocate de urmările viscolului. Redacţia a ţinut seama de toate rezolvările pe care le-aţi trimis.

Barbul C. şi **Cîmpeanu V.** — Noţiunea de « eter » este antiştiinţifică. Mişcarea Pămîntului se raportează faţă de soare. Pentru a vă lămuri mai bine în această problemă citiţi manualul de Astronomie pentru clasa X-a. Pentru celelalte întrebări vă rugăm să vă adresaţi profesorilor de matematică şi fizică.

RUBRICA REZOLVITORILOR DE PROBLEME[1)]

(Urmare)

Pînă la 15 februarie 1954 s-au mai primit cel puțin cinci soluții bune la problemele propuse în R.M.F., după cum urmează:

PANCIU-BÂRLAD. *Școala elementară din Răcoasa*, clasa VI-a. Porumb Mircea (E: 330, 335, 336, 346, 349, 353, 354, 357, 362); clasa IX-a *liceu*, Dragomirescu Lidia (904, 906, 919, 923, E: 305, 306, 309, 312); clasa X-a, Cristian I. Gheorghe (E: 292, 309, 313, 338, 345, 347, 358, 349, 370, 371, 373, 382; 871, 873, 876, 878, 882, 905, 910, 912, 915, 916, 919, 927, 1106), Olaru Ionuț (871, 872, 873, 910, 916, 919, 923, 925, 938, E: 291, 292, 294, 298, 305, 306, 309, 311, 313, 314, 328, 335, 338, 370).

PIATRA NEAMȚ. *Școala de 7 ani din Roznov*, clasa VI-a. Bălici R. (353, 354, 368, 370, 396), Gervescu M. Ioan (E: 337, 345, 346, 351, 352, 353, 354, 357, 358, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 374, 376, 382); clasa VII-a, Ciocan St. Aurica (E.: 316, 324, 346, 353, 355, 370), Darie Ioana (E: 316, 346, 353, 355, 370), Limboi Elena (E: 316, 346, 353, 355, 370), Nepit Doina (316, 324, 346, 353, 355), Țurcan C. Elena (E: 316, 324, 346, 353, 355, 370); *Liceul de fete*, clasa VII-a. Minuț Victoria (E: 305, 306, 309, 310, 311, 312, 315, 316, 317, 318, 320, 322, 323, 324); clasa IX-a. Constantin Corina (999, 1084, E: 335, 356, 358, 361, 370), Dascălu Sanda (1084, E: 329, 335, 351, 356, 858, 362), Stăncescu Angela (873, 1048, E: 329, 335, 336, 339, 356, 358, 362, P), Țifui Zenobia (873, 1034, 84, E: 356, 358, 361, 262, 378); clasa X-a. Coster Clara (1010, 84, 98, E: 305, 306, 378), Baruch Sofia (1069, 78, 84, E: 329, 358, Popa Marioara 904, 906, 915, 971, 974, Diaconescu Gabriela (1012, 38, 40, 43, 78, 80, E: 306, 308, 313, 330), Vasilescu Florica(906, 950, 1040, 43, 62, 68, 78, 81, 84, 98, E: 305, 306, 312, 313, 358, 362, 373, 378); clasa XI-a. Calianu Narciza (945, 946, 948, 1084, 98, E: 356, 358, 370, 373, 381); *Liceul de băieți* clasa VIII-a. Gavril Vasile (E: 335, 353, 356, 358, 367, 369, 370, 382); clasa X-a. Biola Adrian (872, 873, 885, 901, 907, 909, 913, 915, 923, 927, 930, 931, 938, 940, 943, 944, 946, 948, 951, 1063, E: 317, 318, 320, 327, 328, 329, 331, 335, 358, 365, 371), Constantinescu Emil (945, 952, 971, 972, 973, 975, E: 316, 321, 323, 324), Edit Lazăr (908, 913, 938, 943, 946, 959, 972, 973, 974, 975, 988, 992, 903, 994, 999, 1000, 1, 2, 3, 3, 14, 18, 25, 33, 38, 40, 43, 68, 69, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 87, 88, 98, E: 346, 347, 353, 355, 356, 357, 358, 360, 369, 370, 378, 381, 382), Gavril Gheorghe (881, 885, 891, 902, 923, 927, 937, 938, 939, 940, 941, 943, 945, 946, 948, 950, 954, 957, 959, 963, 971, 972, 973, 974, 975, 1019, 57, 58, 59, 62, 65, 68, 71, 78, 79, 82, 84, 98), Ciocodan Vasile (813, 871, 872, 873, 885, 915, 923, 938, 940, 943, 945, 946, 948, 971, 972, 973, 974, 976, 1058, 68, 80, 82, E: 298, 293, 301, 305, 306, 322, 323, 324, 338, 355, 356, 358, 361, 362, 370, 373, 378, 380, 382, 383), Minuț M. Petru (842, 846, 847, 855, 861, 866, 867, 868, 869, 870, 875, 900, 902, 907, 909, 911, 914, 917, 943, 945, 946, 948, 976, 1007, 25, 40, 42, 44, 84, 106); clasa XI-a. Popa A. Ioan (897, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 913, 915, 916, 917, 943, 945, 946, 948, 950, 955, 971, 972, 974, 1012, 38, 40, 42, 43, 54, 55, 57, 58, 59, 63, 65, 68, 69, 78, 79, 81, 82, E: 305, 318, 329, 344, 355, 358, 359, 362), Popa G. Ion (897, 938, 1030, 38, 42, 43, 63, 65, 68, 78, 82, 84, 93, E: 292, 294, 299, 303, 305, 306, 309, 312, 344, 353, 358, 370, 381), Enache Constantin (897, 964, 998, 1038, 65, 68, 69, 78, 81, 82, 84, E: 358, 370, 373, 381), Solomon A. Heinrich (897, 946, 950, 972, 1012, 38, 43, 54, 57, 58, 63, 79, 82, E: 323, 324), Pristavu V. Ioan (900, 905, 906, 907, 910, 911, 913, 917, 930, 931, 941, 942, 948, 952, 954, 955, 964, 972, 973, 977, 988, 992, 993, 994, 1002, 19, 33, 42, 58, 63, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 98), Vasilescu Stelian (871, 872, 873, 897, 906, 908, 942, 943, 945, 946, 948, 950, 1019, 25, 30, 38, 40, 42, 43, 54, 55, 57, 58, 59, 63, 65, 68, 78, 81, 82, 84, E: 305, 306, 329, 335, 336, 344, 349, 358, 362, 365, 370, 371, 373, 382).

PITEȘTI. Clasa VII-a, Pietroșani. Oproiu I. Camil (E: 316, 317, 320, 321, 322, 323, 324, 327, 328, 329, 332, 333, 334, 335). *Școala medie tehnică, Voicești. Drăgășani*, anul II. Dascălu C. Mircea (944, E: 316, 318, 370, 387, 391, 394, 395, 400), Manea I. Nicolae (1084, E: 316, 338, 370, 371, 372, 379), Stelea I. Floarea (938, 944, 1084, 1106, E: 295, 370, 382; Clasa VIII-a. Rîpeanu Maria (E: 305, 306, 309, 310, 311); clasa IX-a, Bogaciu P. Valeriu (1033, 35, 38, 40, 43), Dascălu I. Gheorghe (871, 872, 873, 1069, 78, E: 292, 358, 362), Gulie I. Nicolae (890, 904, 906, 913, 938, 999, 1000, E: 304, 305, 306, 318, 324, 370, 373), Șerb G. Adrian (992, 993, 994, 996, 998, 999, 1000, 1, 2, 3, 12, 14, 16, 18, 19, 20, 22, 25, 26, 28, 29, 33, 35, 38, 39, 42, 43, 45, 53, 55, 61, 62, 63, 65, 68, 69, 70, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 94, 95, 98, P), Udrescu St. Emil (1025, E: 291, 294, 355, 356, 357, 370, 371, 381); clasa X-a. Petcu Mircea (904, 910, 913, 950, 1007, 25, 38, 42, 68, 69, 73, 78, 81, 83, 84, 88, 102, 106, 113, E: 338, 353, 358, 354, 361, 364, 365, 370), Sandu Iulian (839, 841, 845, 863, 871, 872, 873, 876, 904, 905, 910, 971, 972, 973, 986, 987, 988, 999, 1001, 18, 19, 68, 81, 84, 85, 106, E: 291, 292, 293, 294, 298, 300, 318, 324, 369, 370, 371, 372, 373, 376, 378, 379, 381, 382, 383), Saraci M. Dumitru (877, 904, 905, 906, 907, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 918, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 937, 939, 940, 941, 942, 944, 949, 950, 959, 965, 966, 971, 972, 975, 978, 979, 980, 985, 986, 987, 989, 990, 991, 993, 994, 996, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 5, 7, P), Steriopol Ion (838, 844, 946, 948, 950, 951, 955, 958, 959, 962, 1084, 93, E: 294, 299, 318, 321, 324, P); clasa XI-a Iosifescu V. Marius (946 — 955, 957 — 962, 1005 — 1018, 1020, 1022 — 1035, P), (46 probleme); *Școala medie tehnică de mecanică*, anul III. Mihai M. Constantin (358, 362, 364, 365, 380, 1109); anul IV. Bărbulescu Alexandru (862, 1025, 42, 68, 81, 84, E: 299, 335, 358, 360, 361, P).

PLOEȘTI. Clasa VII-a, *Pucioasa*. Fejer Gabriela (E: 304, 306, 309, 310, 311, 314, 322, 348, 352, 353); clasa VII-a *Copăceni*. Dragomir Toma (E. 305, 306, 337, 346, 347) clasa VI-a. *Bezdead*. Paraschiv G. Elena (E: 337, 349, 358, 370, 373, 377, 378, 380, 381); *Școala tehnică de petrol* anul IV. Drăgulin Mircea (E: 339, 382, 383, 385, 386, 388, 389,; 1009, 18, 41, 52, 105, 106, 107, 137, 139), Elovici Dorin (1009, 41, 52, 105, 106, 107, 137, 139, E: 328, 339, 345, 346, 362, 364, 365, 382, 384, 385, 387, 388, 389); clasa VIII-a. Bogdan Mircea (1068, E: 318, 329, 356, 358, 380), Costeanu Sorin (E: 353, 355, 358, 362, 365, 370, 382), Ene V. Gheorghe (E: 305, 306, 309, 314, 358, 370, 380, 382, 383), Dinu Constantin (E: 330, 341, 343, 356, 367, 370, 376, 382), Georgescu Doru (E: 353, 354, 358, 361, 370,

[1)] Cu începere dela 1 Iunie 1954 se vor anunța numai rezolvitorii dela care primim cel puțin 10 soluții bune la problemele propuse în ultimele 5 numere apărute. Redacția ține evidența colaboratorilor dela care am primit mai puțin de 10 soluții bune pînă la complectarea numărului minim cerut.

380), Dinescu Sorin (E: 306, 309, 316, 335, 341), Mircea Tr. Sergiu (904, 974, 1084, 98, E: 324, 339, 349, 350, 353, 358, 361, 365, 370, 382, P), Angelescu P. Alexandru (E: 356, 369, 370, 371, 372, 376,) Ionescu Mircea (E: 356, 358, 361, 370, 380, 382), Popescu P. Alexandru (E: 358, 365, 369, 371, 382), Rădulescu Gheorghe (842, 887, 1070, E: 355, 356, 358, 365, 370, 382), Văgăunescu Gheorghe (1070, 78, E: 361, 380, 381); clasa IX-a. David Gh. Vasile (972 974, 999, 1025, 68, 81, 84, E: 294, 335, 356, 370, 373, 385), Gheorghiu Nicolae (1033, 38, 99, 106, E: 339, 342, 343, 348, 373), Petrescu D, Sorin (840, 850, 872, 873, 876, 878, 904, 906, 913, 940, 999, 1000, 1, 19, 22, 25, 42, 68, 69, 78, 81, 84, E: 291, 294, 305, 306, 335, 370), Opriş Cristache (871, 872, 873, 904, 912, 915, 916, 937, 938, 1084, 97), Stroe Radu (867, 868, 873, 881, 882, 888, 907, 908, 910, 926, 928, 941, 942, 944, 971, 988, 993, 1001, 4, 12, 38, 43, 58, 65, 68, 69, 76, 78, 80 81, 84, 93, 98, 1104, 1106, 1113); clasa X-a. Biclineru V. Vasile (842, 887, 897, 992, 944, 946, 950, 1007, 12, 22, 25, 30, 33, 38, 40, 54, 65, 84, 85, 98), Ionescu Margareta (1068, 78, 84, E: 379, 380, 381); clasa IX-a. Lupuţiu Ioan (839, 840, 845, 850, 852, 888, 900, 906, 911, 923, 929, 931, 942, 945, 948, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 964, 968, 969, 978, 980, 988, 992, 993, 994, 996, 999, 1000, 1, 2, 9, 11, 22, 25, 29, 40, 42, 50, 58, 61, 62, 63, 65, 68, 69, 70, 73, 76, 78, 79, 80, 81, 84, 85, 87, 88, 89, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 103, 106, 113, E: 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 334, 335, 336, 337, 338, 344, 349, 350, P); clasa X-a. Jipa Gh. Vasile (879, 882, 916, 927, 928, 929, 930, 931, 934, 946, 952, 954, 957, 963, 964, 966, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 984, 986, 988, 992, 993, 994, 996, 998, 1001, 2, 3, 7, 12, 18, 19, 24, 55, 62), Herişan Ionel (873, 875, 938, 1078, 84, 88, E: 294, 339, 358, 361), Parepa C. Grigore (842, 946, 950, 1020, 1036, 1040, 1042, 60, 65, 68), Pavelescu P. (845, 888, 900, 905, 911, 946, 952, 960, 979, 984, 992, 994, 1000, 2, 5, 7, 12, 16, 20, 25, 37, 40, 53, 63, 65, 68, 69, 70, 79,), Schip Z. Hary (845, 876, 904, 923, 950, 952, 1025, 39, 40, 62, 68, 69, 89, P), Ştefănescu Dan (1062, 68, 70, 78, 79, 81, E: 353, 355, 356, 382), Stanciu M. Toma (944, 945, 946, 949, 950, 952, 953, 954, 957, 959, 963 971, 972, 973, 974, 986, 992, 1006, 7, 8, 12, 13, 17, 22, 25, 29, 30, 33, 35, 37, 38, 40, 52, 61, 62, 65, 67, 74, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 90, 93, 95, 98, 99, 100, 104, 106, 109, P), Vasilescu T. Teodor (1065, 68, 70, 78, 81, 84, 93, 94, 95, 106), Teodorescu Ştefan (866, 904, 905, 906, 907, 912, 913, 915, 916, 921, 925, 926, 928, 938, 940, 941, 956), Ungureanu Gheorghe (905, 940, 944, 945, 959, 962, 1043, 55); clasa XI-a. Dăscălescu Gheorghe (867, 871, 872, 873, 905, 909, 984, 1079, 84, 98), Ionescu I. Ion (848, 880, 881, 888, 978, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 996, 998, 999, 1000, 1, 2, 3, 4, 9, 18, 36, 37), Nicolescu Corneliu (950, 999, 1020, 25, 38, 78, 84, 87, E: 306, 353, 358, 362), Marinescu Adriana Aida (908, 917, 946, 1040, 76, 84, 85, 87, 88, 94, 98, 106), Silion Dinu (842, 861, 863, 864, 865, 866, 879, 897, 900, 902, 908, 921, 922, 928, 930, 932, 936, 943, 944, 946, 948, 950, 956, 964, 967, 968, 984, 993, 994, 996, 997, 998, 999, 1000, 1, 9, 19, 23, 24, 25, 26, 37, 38, 40, 42, 46, 57, 61, 65, 67, 68, 69, 70, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 112, 113,P).

PREDEAL. Clasa XI-a. Alexa Ioan (878, 879, 880, 881, 882, 883, 885, 887, 888, 889, 892, 894, 895, 897, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 923, 927, 928, 929, 930, 931, 937, 938, 940, 941, 942, E: 305, 306, 309, 312, 313,) Alexandru N. Gheorghe (863, 878, 881, 888, 904, 905, 907, 910, 911, 916, 917, 937, 938, 940, 942, 950, 952, 959, 964, 971, 972, 974, 975, 976, 986, 988, 992, 999, 1000, 2, 6, 68, 78, 80, 81), Apostu I. Gheorghe (878, 879, 881, 883, 888, 904, 906, 907, 908, 910, 912, 913, 915, 916, 917, 927, 937, 938, E: 305, 306, 309, 311), Calotescu O. Eduard (881, 887, 888, 889, 892, 893, 894, 904, 905, 907, 910, 911, 913, 926, 927, E: 301, 305, 306, 311, 312), Coman Gheorghe (878, 881, 883, 888, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 912, 913, 914, 915, 917, 919, 923, 927, 937, 938, 940, 942, 950, 953, 972, 973, 974, 976, 999, 1000), Epuraş Mircea (878, 879, 881, 883, 885, 897, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 923, 927, 928, 929, 930, 931, 937, 938, 940, 941, 942), Huştiuc C. (878, 880, 881, 882, 883, 885, 887, 888, 889, 892, 895, 896, 897, 900, 901, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 919, 920, 921, 923, 927, 928, 929, 930, 931, 937, 938, 940, 941, 942, E: 301, 303, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313), Grabcev D. Boris (877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 887, 888, 889, 890, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 901, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 923, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 933, 934, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942), Greculescu V. Ioan (878, 879, 881, 883, 885, 887, 888, 889, 892, 897, 900, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 923, 927, 928, 929, 930, 931, 937, 938, 940, 941, 942, E: 305, 306, 309, 320, 322), Pupăzan V. Nicolae (878, 881, 883, 916, 917, 921, 930, 931, 937, 963, 971, 973, 1029, 35, 36, 61, 65, 66, 69, 82, 87, 88, 98), Răduţ A. Nicolae (878, 881, 882, 883, 887, 888, 889, 892, 893, 894, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 917, 921, 923, 926, 927, 928, 929, 930, 937, E: 301, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 313, 338, 340, 342), Roşulescu Gh. Grigore (871, 872, 873, 878, 879, 881, 883, 887, 888, 900, 904, 906, 908, 912, 915, 916, 919, 923, 938, 973), Steinberg Victor (878, 881, 887, 888, 889, 892, 893, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 921, 923, 926, 927, 938, 940, 942), Stoian Aurel (878, 881, 883, 887, 888, 889, 892, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 912, 913, 914, 915, 917, 919, 923, 927, 938, 940, 942), Torsan Ilie (878, 881, 888, 889, 893, 894, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 911, 912, 913, 915, 916, 921, 923, 926, 927, 929, 938, 940, 942, E: 301, 305, 306, 307, 309, 310, 311, 312, 313), Uţă Marin (945, 948, 1047, 53, 55, 58, 60, 61, 62, 63, 65, 66, 68, 69, 70, 71, 72, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, P).

RĂDĂUŢI. *Liceul de băieţi*, clasa XI-a. Chifan Aurel (944, 946, 950, 951, 964, 1009, 68, 70, 78, 79, 81, 84, 87), Lazăr Dumitru (914, 950, 984, 998, 1007, 12, 27, 33, 38, 39, 40, 42, 45, 65, 68, 70, 72, 78, 81, 84, 87, 88, 93, 96, 98), Năstase Virgil (904, 950, 954, 971, 974, 999, 1002, 7, 41, E: 305, 306, 318, 324, 338).

RÎMNICUL SĂRAT. Clasa VIII-a fără frecvenţă. Cristea Aurel (1068, E: 338, 341, 344, 347, 349, 358, 360, 361, 362, 364, 365); clasa X-a, Dorobăţ I. Eftimie (908, 910, 913, 924, 1023, 25, 31, 38, 40, 42, 69, 84, 98, E: 327, 341, 344, 349, 350, 371,), 381), Sîrbu Gheorghe (904, 910, 913, 971, 972, 974, 1025, 84), Teodorescu Cristian (888, 897, 900, 904, 905, 906, 908, 912, 913, 915, 916, 919, 921, 923, 927, 937, 938, 940, 942, P).

RÎMNICUL VÎLCEA. Clasa VIII-a. Jugulea Eugen (904, 906, E: 305, 306, 327, 335); clasa IX-a, *liceul seral*. Zigulescu D. Maria (1033, 37, 38, 42, 84, E: 305, 306); clasa XI-a. Roşianu C. Dragomir (904, 906, 908, 912, 923, 1076, 84, 87, E: 305, 306, 327, 329, 331, 356, 369, 371,

377, 382), Zigulescu D. Marin (1023, 43, 48, 61, 65, 68, 76, 78, 79, 81, 82, 84, 87, 88, 98, 106).

REŞIŢA. Clasa IX-a seral. Kulcsar Ştefan (1005, 42, E: 335, 358, 370, 371, P); clasa XI-a. Popescu Al. Dan (945, 946, 950, 951, 955, 958, 959, 964, 966, 976, 981, 984, 996, 1006, 7, 22, 24, 25, 84, 88, 95, 98, 113, P).

ROMAN. Şcoala medie tehnică, anul I. Radu Vasile (E: 324, 356, 358, 361, 370, 373, 379, 382); anul II. Bacalu Ioan (879, 908, 909, 923, 931, 942, 943, 946, 950, 952, 954, 957, 994, 996, 1033, 37, 54, 62, 68, 69, 78, 79, 80, 81, 84, 88, P); anul III. Calianu Gh. Nicolae (837, 838, 839, 843, 862, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 878, 880, 898, 904, 905, 906, 907, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 919, 923, 925, 927, 928, 930, 931, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 971, 972, 973, 974, 975, E: 290, 291, 292, 293, 294, 295, 298, 300, 301, 303, 305, 306, 309, 311, 312, 313, 314, 315, 317, 318, 320, 322, 323, 324), Floareş Alexandru (1107, E: 352, 353, 358, 362, 364, 365, 368); *Liceul de băieţi*, clasa VIII-a. Murărescu Gheorghe (837, 838, 845, 863, 871, 873, 874, 876, E: 291, 293, 300), Steinberg Marcel (863, 871, 873, 876, E: 290, 291, 292, 293, 294, 300); clasa IX-a. Baghian Ioan (906, 912, E: 335, 370, 382), Lupovici Solo, 906, 908, 918, 920, 923, 929, 930, 932, 937, 938, 954, 971, 972, 973, 974, 975, E: 305, 306, 309, 312, 316, 324), Stoica C. Constantin (871, 872, 873, 912, 918, 919, 920, 922, 938, 998, 999, 1084, E: 329, 370, 382); clasa X-a. Mihăilă M. Ieronim (837, 859, 877, 910, 911, 923, 931, 941, 950, 994, 1001, 2, 3, 84, 87, 106, E: 305, 316, 317, 318, 320, 322, 324, 370, 374, 382); clasa XI-a. Mitrofan Gheorghe (881, 888, 929, 971, 972, 973, 974, 976).

ROŞIORII DE VEDE. Clasa VII-a. Noica Mihai (E: 352, 353, 354, 356, 358, 360, 362, 365, 369, 270, 271, 372, 373, 374, 376, 379, 380, 381, 382, 383); clasa IX-a. Manea I. Ştefan (E: 370, 371, 373, 375, 380, 381, 382); clasa XI-a. Oancea Laurenţiu (E: 304, 306, 309, 312, 324, 370, 373, 380, 382, 383,).

SATU MARE. Clasa VIII-a. Benea A. Cornel (E: 358. 369, 370, 371, 373, 379, 382); clasa IX-a. Chilinţan Octavian (987, 988, 989, 999, 1001, 4, 68, 84, E: 328, 332, 337, 344, 369, 370).

SIBIU. *Şcoala medie tehnică*, anul II. Birsan Ioan (1059, 68, 69, E: 358, 362, 365, 370, 376, 377, 382), Doboş Horaţiu (E: 305, 370, 371, 373, 374), Halmaghi Eugen (1053, 68, E: 329, 335, 353, 358, 368, 369, 370, 371, 374, 383); anul III. Dancu Nicolae (1025, 40, 42, 84, 85, 87, 94), Samoilă Mircea (1070, 72, 93, 94, 98, 112, E: 353, 362, P); clasa XI-a. Crăciun P. Nicolae (872, 873, 875, 993, 996, 998, 1030, 38, 44, 62, 65, 68, 69, 73, 76, 79, 81, 82, 98).

SIGHIŞOARA. Borzea Eugen (885, 908, 912, 915, 923, 950, 974, 986, 1042, 68, 79, 106, E: 315, 317, 318, 320, 322, 328, 329, 331, 335, 358, 365, 370, 382); clasa XI-a. Müller Erhard (1018, 68, 69, 78, 79, 81, 84, 106).

SLOBOZIA. *Traianu* (Regiunea Bucureşti). Absolvent. Mocanu I. Marin (904, 905, 906, 908, 909, 910, 913, 920, 923, 927, 931, 938, 944, 950, 952, 971, 974, 985, 988, 992, 993, 994, 996, 999, 1055, 58, 62, 68, 69, 73, 79, 80, 81, 82, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 94, 98, P).

SINAIA. Clasa IX-a. Onoiu Filip (E: 1053, 62, 65, 84, E: 353, 354, 357, 358).

SLĂNIC Teleajen (Ploeşti), clasa VIII-a. Ionescu Ioan (E: 329, 335, 339, 358, 379, 380, 381).

SLATINA. Clasa IX-a. Antonescu Păun (E: 293, 294, 300, 305, 306, 309, 356, 358, 362, 370, 373, 378; 871, 873, 913, 1068, 69, 78, 84), Buşeu P. Constantin (E: 290, 292, 293, 294, 305, 312, 331, 335, 370, 371), Dumitraşcu Ilie (1068, 69, 84, E: 290, 293, 314, 356, 358, 362, 370, 373, 382), Gălbenuş I. Eugeniu (E: 315, 316, 317, 320, 355, 369, 370, 371, 382), Ghergu N. Ion (888, 904, 929, 1042, 69, 78, 81, 84, 102, E: 291, 292, 294, 304, 305, 306, 308, 309, 312, 314, 349, 350, 351, 358, 361, 370, 373, 380, 381, 383), Jaică I. Florea (1068, E: 256, 298, 335, 336, 358, 362), Ţuluş C. Florea (1081, E: 335, 358, 362, 370), Ursu G. Mihai (904, 938, 1029, 38, 39, 69, 84, E: 309, 310, 358, 370, 373); clasa X-a. Florea Ion (863, 871, 872, 873, 875, 881, 904, 905, 908, 910, 911, 927), Gotesman Jany (1038, 48, 88, 98, E: 312, 343, 354, 358, 362, 370, 381, 382), Predeanu Alexandru 1038, 79, 84, E: 305, 347, 348, 356, 360, 362, 370), Pişculescu Constantin (827, 839, 845, 871, 873, 875, 904, 905, 923, 927, 937, 938, 940). Popescu Gh. Sergiu (844, 872, 879, 888, 906, 908, 923, 930, 948, 993, 998, 999, 1001, 2, 4, 7, 9, 19, 24, 25, 29, 30, 31, 33, 37, 38, 40, 41, 46, 48, 55, 62, 68, 69, 73, 77, 78, 81, 84, 86, 87, 88, 99, 106, P), Petrulian L. Ştefan (873, 913, 915, 938, 950, 973, 992, 993, 1000, 33, 38, 40, E: 291, 327, 329, 335, 336, 358, 361, 362), Poida Gr. Emilian (917, 923, 927, 938, 940, 942, 954, 972, 1084, E: 301, 318, Soneaţă S. Ilie (823, 835, 871, 872, 873, 904, 905, 910, 911, 913, 1025, 38, 40, 78, E: 313), Teculescu Vasile (863, 871, 875, 950, 952, 973, 974, 992, 993, 1000 38, 62, 68, 84, E: 324, 329, 336, 347, 356, 360, 364, 370), Voiculescu Traian (871, 872, 873, E: 358, 362), Zamfir Vasile 874, 907, 908, 923, 972, 973, 974, 999, 1028, 79, 84, 87), clasa XI-a. Niculescu Ion (938, 940, 942 E: 6 303, 305, 306, 309, 312, 313, 362, 370).

SUCEAVA. Clasa VI-a. Nimţan Traian (E: 315, 337, 346, 351, 369, 371, 382); clasa VII-a. Goldenberg Minda (E: 305, 306, 318, 356, 358, 370); clasa VIII-a. Nimţan Ion (E: 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, clasa IX-a. Mandicescu Gheorghe (910, E: 303, 304, 356, 369, 370, 371), Rotaru N. Constantin (839, 841, 842, 864, 875, 879, 880, 881, 882, 900, 908, 929, 930, 931, 939, 940, 941, 942, 944, 946, 948, 950, 962, 986, 988, 1022, 29, 40, 70, 87, 98, 106, E: 291, 295, 303, 332, 334, 337, 348, 352, 356, 359, 365, 370, 371, 377, 378, 380, 382, 391, 397); clasa IX-a. Budai Teodor (874, 875, 880, 881, 882, 908, 911, 917, 920, 925, 927, 928, 930, 931, 939, 940, 941, 942, 989, 991, 992, 993, 994, 997, 1004, 18, 25, 40, 93, 106, 113, P).

SFT. GHEORGHE. Clasa X-a. Zaharias Ştefan (950, 962, 986, 992, 999, 1001, 7, 25, 33, 38, 40, E: 321, 324, 329, 336, 341, 347, 349).

TÂRGOVIŞTE. Clasa VII-a. Filip M. Stelian (1022, 42, E: 279, 290, 294, 327, 328, 329, 331, 338, 361, 370, 377); Brebente P. Corneliu (834, 850, 852, 876, 904, 905, 906, 912, 913, 914, 915, 919, 923, E: 303, 305, 306, 309, 310, 311, 313, 358), Brebu I. Gheorghe (840, 842, 845, 848, 865, 867, 888, 895, 904, 905, 906, 910, 911, 913, 915, 916, 919, 923, 927, 929, 930, 937, 938, 940, 941, 942, 944, 950, 952, 955, 959, 950, 962, 965, 966, 971, 972, 973, 974, 975, 977, P) Galaţky Gheorghe (929, 1065, 67, 68, 78, 80, 82, 84, 93, 98, 106, P), Mateescu I. Marin (839, 850, 863, 871, 872, 873, 875, 878, 882, 904, 915, 923, 927, 931, 940, 971, 972, 974, 1007, 54, 68. 69, 78, 84, 85, 87, E: 304, 305, 306, 315, 317, 320, 322, 347, 348, 349), Oprea A. Aurelian (798, 813, 819, 822, 834, 835, 838, 842, 845, 852, 879, 882, 888, 896, 912, 931, 932, 944, 946, 950, 959, 965, 971, 975, 993, 994, 996, 999, 1025, 33, 38, 40), Stoian I. Gheorghe (863, 861, 869, 884, 926, 944, 948, 984, 987,

993, 994 P); clasa XI-a Ionescu I. Ion (1040, 41, 42, 46, 47, 54, 60, 61, 62, 64, 65, 68, 69, 70, 78, 79, 81, 84, 85, 86, 87, 91, 106, 112, 113, 114, P), Nica Gh. Ioan (909, 913, 994, 999, 1025, 65, 68, 69, 78, 81, 84, 93).

TÎRGU JIU. Clasa V-a Velicescu T. Mircea (E: 304, 305, 306, 309, 310, 311, 314, 316, 330, 332, 335, 337, 347, 353, 354); clasa VIII-a, fete. Amzulescu Liana (1084, E: 305, 306, 309, 338, 339, 353, 364, 370); clasa X-a. Catighera Virgil (908, 923, 1033, 42, 78, 84, 98); clasa XI-a. Crăciun V. Constantin (1000, 38, 78, 84, 87, 90, 98, E: 370, 373, 378, P), Gornoviceanu Coriolan (775, 1025, 68, 81, 82, 84, 98); Neamțu I. Ion (946, 948, 952, 953, 959, 962, 1007, 12, 25, 29, 30, 33, 38, 39, 42, 43, 44, 45, 55, 57, 58, 59, 61, 62, 65, 68, 69, 70, 72, 76, 78, 80, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 95,96, 97, 98, 99, 100, 106, 113), Olaru Grigore (980, 982, 1007, 9, 11, 17, 18, 29, 33, 38, 40, 42, 43, 52, 55, 58, 62, 65, 68, 69, 70, 76, 78, 80, 81, 82, 83, 84, 87, 88, 89, 90, 98, 106), Tașcău Ilie (370, 372, 378, 380, 381, 382), Pielescu N. Ion 1025, 42, 43, 65, 68, 78, 87, 98, E: 305, 324, 329, 339, 341, 349, 356, 370, 373, 378, 391, 397).

TÎRGU MUREȘ. Clasa VII-a. Matei Aurel (913, E: 292, 315, 317, 322, 358, 361); *Școala medie tehnică de comerț*, anul II, Pop Ana (904, 964, 974, E: 329, 332, 335, 349); *Liceul de băieți*, clasa IX-a. Albu Mircea (787, 791, 794, 798, E: 273), Matei Ioan (912, 913, 914, 916, 937, 938, 941, 959, 971, 973, 976, 999, 1038, 68, 78, E: 276, 277, 279, 280, 292, 294, 305, 306, 308, 309, 310, 311, 315, 316, 317, 318, 320, 322, 324, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 335, 336, 339, 344, 346, 347, 348, 349, 350, 353, 354, 358, 361, 364, 365, P); clasa X-a. Gosu P. Petru (873, 889, 904, 906, 911, 913, 971, 1048), Ință I. Ioan (906, 913, 1038, 62, 90, 93, E: 378), Mărginean V. Nicolae (1038, 62, E: 324, 336, 358, 362, 378), Moraru Titus (871, 906, 913, 915, 916, 937, E: 311, 314, 318, 324), Laslo V. Ioan (839, 844, 873, 878, 882, 904, 905, 906, 907, 908, 910, 913, 923, 937, 938, 950, 1079, 81) Pișt ănilă Emil (904, 906, 908, 910, 913, 923, 937, 938, 950, 1079, 81) clasa XI-a Bunica M. Octavian (837, 840, 842, 843, 847, 848, 849, 850, 852, 865, 866, 867, 868), Matei A. Nicolae (785, 793, 799, 805, 840, 843, 844, 847, 848, 852, 861, 865, 866, 867, 880, 897, 900, 921, 926, 927, 928, 930, 931, 934, 936, 939, 943, 962, 975, 986, 988, 992, 993, 994, 996, 999, 1000, 2, 4, 18, 25, 29, 33, 38, 40, 42, 68, 70, E: 299, 300, 301, 303, 305 — 309, 311 — 318 320, 322—324, 327—331, 333, 335—339, 341—344, 346—350, 352—356, 358—365, P) Pașcanu St. Eugen 837, 838, 839, 841—846, 848, 850, 851, 853, 854, 857, 863, 864, 865, 867, 870—873, 875, 876, 878, 879, 881, 882, 888, 904, 905, 906, 908, 912, 913, 915, 916, 923, 929, 937, 938, 940, 950, 964, 971—974, 988, 999, 1000, 65, 68, 69, 78, 81, 84, E: 292—298, 300, 304, 305, 306, 308, 309, 311, 312, 313, 315—320, 322, 327, 333, 335, 341, 349, 350, 353, 354, 356, 358, 361, 363, 364, 365, 370, 373), Pupăză N. Nicolae (836, 843, 844, 847, 848, 849, 851, 852, 859, 861, 864, 866, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 879, 883, 884, 888, 932, E: 290, 291, 292, 294, 295, 296, 298, 299, 300), Weszelly Tiberiu (878, 881, 882, 887, 888, 889, 892, 893, 894, 896, 897, 899, 900, 901, 902, 904, —914, 916—919, 921—925, 927—946, 950, 952, 954, 957, 959, 961—981, 983—999, 1000—1004 P).

TÎRGU NEAMȚ. *Liceul mixt*, clasa VIII-a. Focșeneanu I. Ion (E: 315, 316, 317, 318, 319, 320, 322, 323, 324).

TECUCI. Clasa X-a. Aronovici Jean (1033, 38, 68, 69, 70, 84, 88, 98, E: 338, 344, 349, 350, 358, 364, 365, 370, 371, 377). Corban Adrian (878, 888, 900, 906, 907, 908, 909, 911, 912, 916, 917, 923, 925, 927, 928, 930, 937, 931, 938, 940, 942, 944, 946, 948, 950, 959, 963, 968, 975, 976, 978, 982, 984, 985, 987, 988, 989, 993, 994, 996, 1002, 4, 23, 37, 42, 65, 66, 84, 85, 86, 87, 88, 91, 98, 106, P), Făinaru Ion (999, 1000, 84, E: 303, 305, 306, 327, 329), Geogloman Guță (1038, 84, 91, E: 338, 341, 358, 365, 370, 373, 377), Ivan Mihai (1068, 84, E: 320, 358, 364, 375, 380), Lupașcu Aurel (E: 292 338 349, 350, 370, 371, 378, 380, 381, 383, 1062, 80, 84, 85, 88 97), Marcu Emanoil (908, 932. 938, 972, 999, 1069, 84, 98, E: 305, 306, 312, 329, 335, 339, 358, 360, 364, 365), Mitu Alexandru (881, 907, 930, 946, 1012, 1033, 38, 42, 43, 46, 55, 79, P, Stoica Radu 871, 873, 876, 1069, 84, E: 338, 346, 347, 358, 364), Morozan Teodor (847, 857, 950, 966, 969, 979, 980, 986, 987, 998, 1018, 22, 25, 44, 61, 66, 84, 87, 88, 89, 93, 95, 96, 98, 1099, 1106, P); clasa XI-a. Corban Octavian (974, 989, 1004, 7, 75, 84, E: 306, 312, 317, 318, 322, 335, 337, 358, 362, 365, Flueraru Costică (838, 861, 871, 900, 906, 911, 912, 913, 927, 930, 937, 938, 940, 969, 1000, 69, 78, 80, 84, 93), Ivan Mihai (038, 91, E: 338, 341, 344, 371, 373, 377), Nistor N. Radu (878, 904, 944, 949, 971, 972, 973, 974, 999, 1000, 7, 106), Turcanu D. Ion (838, 839, 957, 983, 984, 985, 999, 1009, 14, 24, 33, 38, 53, 76, 86, 81, 84, 85, 86, 94, 98, 102, 105); *Școala de 7 ani*, clasa VII-a, fete. Micu V. Florica (E: 328, 329, 331, 332, 335, 336, 337, 338, 340, 341, 344, 347, 348, 349, 350, 356, 357, 358, 361, 362, 365, 372, 381).

TIMIȘOARA. *Liceul 1 băieți*, clasa VII-a. Mihăileanu N. Constantin (E: 292, 299, 333, 341, 371, 373, 379, 380, 381); clasa VIII-a. Arsenovici Tiberiu (837, 838, 839, 841, 857, 863, 864, 871, 873, 874, 875, 876, 904, 905, 911, 913, 914, 915, 919, 928, 929, 938, 941, E: 290, 293, 295, 300, 301, 302, 303, 304, 308, 309, 310, 312, 313, 314, clasa X-a. Brașoveanu Ioan (879, 908, 942, 1068, 78, 79, 81, 82, 84, 85, P); *Liceul de fete*, clasa VIII-a. Cismaru Ionica (E: 324, 342, 343, 346, 347, 349, 350, 351); *Școala medie de energie electrică*, anul III, Flinker Gheorghe (1075, 84, 86, 98, 102, 106, 107, 115, E: 337, 338, 339, 352, 354, 358, 362, 364, 365, 370, 382).

TURNU-MĂGURELE. *Liceul mixt*, clasa IX-a, Ciobanu Ioana (1084, E: 357, 371, 373, 382), Coticeru Maria (1084, E: 357, 358, 362, 371, 382), Popescu Carmen (1084, E: 305, 358, 370, 371), Stoenescu Iulian (1068, 84, 99, E: 358, 359, 361, 364, 370, 371, 373, 375, 382), Țene C. Rodian 1042, 43, E: 291, 300, 309, 318, 339, 371); clasa X-a. Constantinescu Horia Viorel (848, 888, 904, 905, 913, 936, 937, 938, 950, 972, 973, 999, 1043, 98, E: 305, 306, 309, 310, 311, 318, 335, 336, 353, 358, 362); clasa XI-a, Dragomirescu Elena (1068, 69, 78, 81, 84, 98, E: 362, 368, 378, 380, 381), Ciucă Melania (1069, 84, 98, E: 358, 361, 364, 365, 370), Țugui F. Emil (872, 875, 882, 904, 905, 915, 916, 923, 931, 937, 938, 942, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 999, 1000, 1, 25, 28, 39, 48, 68, 69, 78, 79, 80, 81, 84, 85, 87, 88, E: 305, 306, 309, 311, 329, 336, 335, 349, 358, 362, 365, 370, 382).

TURNU SEVERIN. Clasa X-a. Geană Bebe (1005, 7, 9, 11, E: 370) Istrătescu I. Vasile (902, 940, 948, 951, 959, 984, 988, 998, 1040, 58, 72, 81, 84, 88, 98, 113, E: 370, 373, 378); clasa XI-a Pîrvuleț u A. Constantin (904, 905, 908, 910, 971, 972, 977, 1038, 68, 69, 78, 81, 84, 97.

VASLUI. Clasa VI-a. Stănescu Viorica(E: 306, 314, 341, 346, 358, 370); clasa IX-a. Stănescu Viorel (904, 915, 916, 937, 973, 974, 1084, E: 346, 356, 370, P); clasa XI-a. Bostan E. Hote (880, 888, 890, 896, 907, 911, 921, 945, 948, 953, 956, 957, 976, 978, 980, 982, 991, 993, 994,

996, 1028, 30, 37, 38, 65, 79, 87, 84, 88, 91, 93, 94, 98, E: 312, 316, 318, 321, 323, 324, 330, 336, 337, 338, 339, 341, 342, 344, 346, 349, 350, 352, 353, 354, 358, 361, 362, 364, 365, 368, 369, 371, 372, 373, 375, 378, 381, 382, P)

ZIMNICEA. Clasa IV-a. *Pietroşani*. Bătinţi M. Iulia (E: 310, 318, 354, 357, 382).

ZALAU. Clasa X-a. Hodiş Gheorghe (839, 876, 882, 908, 919, 923, 966, 971, 993, 1055, 69, 80, 84, 87, 88, 98, 106, E: 294, 360, 366, P).

EVIDENŢIAŢI

Dintre corespondenţii rezolvitori de probleme care au trimis soluţii între 15 decembrie 1953 şi 15 februarie 1954, se evidenţiază:

Iosifescu V. Marius (clasa XI-a, Piteşti) *Weszelly Tiberiu* (clasa XI-a, Tg. Mureş, *Bocu Mircea* (clasa X-a, Oradea), *Lupuţiu Ioan* (clasa IX-a, Ploeşti) *Cristea I. Ion* (clasa IX-a, Constanţa), *Baieră Bogdan* (Clasa X-a, Focşani), *Cocoş Emanuel* (clasa XI-a, Constanţa), *Silion Dinu* (clasa XI-a, Ploeşti), *Purecel Remus* (clasa XI-a, Oraşul Stalin, *Donescu St. Dragomir* (clasa X-a, Focşani), *Mitu Şt. Velicu* (Clasa XI-a, Giurgiu), *Vasilescu Constantin* (clasa XI-a, Călăraşi), *Greculescu V. Ioan* (clasa XI-a, Predeal), *Paşcanu Şt. Eugen* (clasa XI-a, Tg. Mureş), *Corban Adrian* (clasa X-a, Tecuci), *Budai Teodor* (clasa X-a, Suceava), *Matei A. Nicolae* (clasa IX-a, Tg. Mureş), *Popescu G. Sergiu* (Clasa X-a, Slatina), *Saraci M. Dumitru* (clasa X-a, Piteşti), *Şerb Gh. Adrian* (clasa IX-a, Piteşti), *Stanciu N. Toma* (clasa X-a, Ploeşti), *Grabcev D. Boris* (clasa XI-a, Predeal), *Nicolae St. Alexandru* (clasa X-a, L.b.1. Bucureşti) *Zidăroiu G. Corneliu* (clasa XI-a, l.b. 10 Bucureşti), *Ciric Ioan* (Caransebeş), *Mişcol Mircea* (clasa IX-a, Giurgiu), *Tofan V. Ionel* (clasa XI-a, Bacău), *Bătineţu M. Dumitru* (clasa X-a, Giurgiu), *Popa A. Ioan* (clasa X-a, Piatra Neamţ), *Nan Stelian* (*clasa* XI-a, Oraşul Stalin), *Stroe Radu* (clasa IX-a, Ploeşti), *Pristavu V. Ioan* (clasa XI-a, Piatra Neamţ), *Ciucă Gh. Ion* (clasa X-a, Caracal), *Cîrjaliu N. Marin* (clasa VII-a, Giurgiu), *Andreescu Gh. Radu*, (clasa X-a, L.b. 10, Bucureşti), *Tănase Dumitru* (anul IV, *Şcoala* de măsurători terestre, Bucureşti), *Ionescu Cristina* (clasa VII-a, Bucecea-Botoşani), *Gavril Gheorghe* (clasa X-a, Piatra Neamţ), *Lazăr Edith* (clasa X-a, Piatra Neamţ), *Neamţu I. Ion* (clasa XI-a, Tg. Jiu), *Calianu Gh. Nicolae* (anul III, Şcoala tehnică, Roman), *Jipa Gh. Vasile* (clasa X-a, Ploeşti), *Juhas Ioan* (clasa VII-a Inrad, Salonta, Oradea), *Neguţ Gh. Nicolae* (anul III, Şcoala medie de mecanică, Bucureşti), *Mărăndici Elena* (clasa VII-a, scoala 43 fete, Bucureşti), *Minuţ M. Petru* (clasa X-a, Piatra Neamţ), *Mocanu I. Marin* (Absolvent, Slobozia), *Brebu I. Gheorghe* (clasa IX-a, Tîrgovişte), *Olaru Grigore* (clasa XI-a, Tg. Jiu), *Micu V. Florica* (clasa VII-a, Tecuci), *Ţugui F. Emil* (clasa XI-a, Turnu Măgurele), *Lungu L. Ştefan* (anul III, Brăila), *Sandu Iulian* (clasa X-a, Piteşti), *Oprea A. Aurelian* (clasa IX-a, Tîrgovişte), *Rotaru N. Constantin* (clasa IX-a, Suceava), *Morozan Teodor* (clasa X-a, Tecuci), *Gervescu M. Ion* (clasa VI-a Piatra Neamţ), *Vasilescu Stelian* (clasa XI-a, Piatra Neamţ); *Jilăveanu S. Gheorghe* (sondor, Băicoi, Ploeşti), *Fotă M. Stan* (clasa XI-a, Giurgiu), *Pieleanu I. Dumitru* (clasa VIII-a, Giurgiu), *Vidan Marius* (clasa X-a, Giurgiu), *Matei Ioan* (clasa IX-a, Târgu Mureş), *Cîmpu Eugen* (clasa X-a, L.b. 10 Bucureşti), *Bădănac M. Alexandru* (clasa X-a, Corabia), *Dinu Gheorghe* (anul II, Şcoala medie electricitate, Craiova), *Aldea V.* (clasa X-a, Giurgiu), *Stanciu E. Mirel* (clasa X-a, Giurgiu) *Balaban Emil* (clasa X-a, Galaţi) *Chiricuţă Gheorghe* (clasa IX-a, Dej) *Petcu I. Dumitru* (clasa XI-a, Giurgiu), *Herşcovici Iosif* (clasa X-a, Iaşi), *Bostan E. Hote* (clasa XI-a Vaslui), *Lazăr Dumitru* (*clasa* XI-a, Rădăuţi), *Popescu Cireşica* (clasa X-a, L.f.1, Craiova), *Schiopu Eugenia* (clasa X-a, Craiova), *Boarţă Victor* (clasa X-a, Corabia), *Trifan Vasile* (clasa IX-a, L.b.1. Craiova), *Antoniu Ştefan* (clasa X-a, Caracal).

REDACTAREA SOLUŢIILOR

— *Rezolvarea fiecărei probleme* trebuie făcută separat, cu calculele necesare, iar figurile să fie desemnate cu îngrijire. Nu se vor trimite soluţiile mai multor probleme pe aceiaşi foaie; iar fiecare soluţie să fie precedată de numărul de ordine al problemei, enunţul complet şi numele propunătorului. După soluţionarea fiecărei probleme scrieţi citeţ numele, clasa şi şcoala unde urmaţi sau ocupaţia şi adresa şi apoi trimiteţi problemele aşezate în ordinea lor numerică.

— *Se primesc soluţii* numai la problemele şi exerciţiile din ultimele cinci numere apărute din « Revista Matematică şi Fizică ». Soluţiile ce se vor anunţa la rubrica rezolvitorilór în tot cursul anului 1954, se vor socoti la premierea colaboratorilor pe anul 1954.

— *Problemele ce se propun* de către colaboratorii revistei, să fie clar compuse, însoţite de soluţii, să fie personale şi nu luate din cărţi sau reviste, iar trimiterea lor se poate face odată cu problemele rezolvate. Elevii sînt sfătuiţi să înceapă a propune probleme numai după ce au soluţionat un număr destul de mare de exerciţii şi probleme. Problemele propuse necorespunzătoare nu se pot publica. Dacă un corespondent constată că unele probleme deja propuse în R.M.F. mai există publicate în cărţi sau reviste, este rugat să ne arate precis volumul şi pagina unde s-a mai publicat enunţul sau soluţia problemei respective.

— *In redactarea unei soluţii* trebuie alese notaţii potrivite, subliniate părţile principale, iar calculele numerice să fie făcute cu mare îngrijire. Figurile trebuie corect făcute, clare, cu linii pline sau punctate. De multe ori, aceste reguli îndeplinite, conduc la soluţia problemei. Adesea, dintr-o problemă simplă pot ieşi chestiuni interesante. Soluţiile mai dificile se obţin uneori, prin încercări succesive şi studiind chestiuni în legătură cu problema de rezolvat.

— *Corespondentul nostru* care a citit şi a înţeles deplin multe din soluţiile publicate în R.M.F., a rezolvat multe din problemele propuse, poate şi este îndemnat să încerce să schiţeze cîte o notă scoasă dintr-o observare făcută cu ocazia rezolvării unei chestiuni mai grele şi în fine, cei mai avansaţi pot să ne trimită şi cîte un articol cu o chestiune generală sau cu o apropiere originală între chestiuni cunoscute. Aceste note sau articole este bine să fie refăcute de mai multe ori înainte de a fi trimise pentru a evita ca în expunerea făcută să fie scrise vorbe fără rost; iar ideile să deştepte interes pentru cititor. Ordinea şi îngrijirea în prezentarea unei idei pot fi îndeplinite dacă harnicul nostru corespondent a făcut mai multe rezolvări, dacă a citit şi a înţeles deplin, multe din soluţii şi articole publicate în R.M.F. şi dacă a studiat îndeajuns, chestiunea de care se ocupă.

— *Tovarăşii colaboratori elevi* sînt rugaţi să ne trimită date asupra activităţii lor extraşcolare la matematică şi fizică, asupra activităţii cercurilor de matematică sau de fizică la care iau parte şi asupra modului de desfăşurare ale « Olimpiadei matematice », pentru ca apoi, prin revistă, să se poată realiza cu succes un schimb de experienţă.

— *Fiecare cititor al R.M.F.* mai este rugat a face cunoscută revista şi altor cunoscuţi şi a ne trimete propuneri şi sugestii care să fie de folos în munca noastră redacţională.

— *Redacţia nu face abonamente*, nici expediţii de reviste, de aceia, reclamaţiile de neprimirea R.M.F. sau comenzi de numere vechi şi propuneri sau sugestii în legătură cu tirajul sau întîrzierea apariţiei, se pot face la Oficiul poştal local sau Oficiului special de Expediţie a Presei din Bucureşti, str. Const. Mille nr. 14, telefon 5.28.90.

* * *

NUMĂRUL URMĂTOR AL REVISTEI VA AVEA TITLUL : GAZETA MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ SERIA B. PUBLICAŢIE PENTRU TINERET. ANUL V Nr. 5. MAI 1954 (48 PAGINI FORMAT 17/24, IN CONTINUARE)

ABONAMENTELE PE ANUL 1954

se fac prin oficiile poştale, prin factorii poştali, prin difuzorii voluntari şi la secţiile raionale de difuzare a presei.

Tarif pentru profesori, muncitori, tehnicieni, elevi . . . . . Lei 10 anual

C. 359. — INTREPRINDEREA POLIGRAFICĂ Nr. 4. — BUCUREŞTI

Preţul revistei: Lei 1.—